

جبر و مقابلہ

حصۂ دوم



سلسلۂ نصابیاتِ علمیہ جامعۂ عثمانیہ

جبر و مقابلہ

حصۂ دوم

(برائے انٹرمیڈیٹ)

(مصنفہ ہال اینڈ نائٹ)

مترجمہ

مولوی شیخ برکت علی صاحب۔ ایم۔ اے
پروفیسر ریاضی کلیہ جامعہ عثمانیہ

سنہ ۱۳۴۶ھ م سنہ ۱۳۳۷ف م سنہ ۱۹۲۸ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکارِ عالی حیدر آباد دکن

یہ کتاب میکملن کمپنی کی اجازت سے جن کو
حقوق کاپی رائٹ حاصل ہیں،
طبع کی گئی ہے

دیباچہ

جبر و مقابلہ
حصّہ دوم

اِس کتاب کو "ابتدائی[1] جبر و مقابلہ برائے مدارس فوقانیہ" کے سلسلہ میں تصور کرنا چاہیئے۔ پہلے چند ابواب کو نسبت، تناسب، تغیر اور سلسلوں پر زیادہ مفصل بحث کے لئے مخصوص کر دیا گیا ہے جن پر ابتدائی جبر و مقابلہ میں سطحی طور پر بحث کی گئی تھی بنا بریں ہم نے کتاب ہذا میں ایسے مسائل اور مشقیں مندرج کی ہیں جن کا اندراج ابتدائی کتاب میں نامناسب تھا۔

اس لحاظ سے اِس کتاب کا میدان طالب علم کے لئے تقریباً نیا تصور ہو سکتا ہے، اور اس کے مضامین کی وسعت خاص اہمیت رکھتی ہے۔ اِن مضامین پر ہم نے عمیق اور بسیط بحث کرنے کی کوشش کی ہے اور ہر دو مسائل اور مشقوں کو پوری تفصیل سے پیش کیا گیا ہے اور ایسا کرنا ہمارے ذاتی تعلیمی تجربہ کی بنا پر ضروری معلوم ہوتا ہے۔

اِس کتاب میں ہمارا مقصد یہ رہا ہے کہ مضمون کے جملہ ضروری حصوں پر ایسی بسط و شرح سے بحث کی جائے جو ایک جلد کی ضخامت کے لحاظ سے ناموزوں نہ ہو لیکن آخر کے بعض ابواب میں جگہ کی قلت کی وجہ سے مضمون کا محض سرسری خاکا پیش کرنا ہی ممکن ہو سکا ہے۔ موخرالذکر صورتوں میں ہم نے صِرف اس غایت کو ملحوظ رکھا ہے کہ ابتدائی تعلیم کے اغراض کے مطابق مضمون کی محض سطحی تشکیل کر دی جائے اور عمیق تعلیم کے لئے طالب علم کو خاص خاص کتابوں کے مطالعہ کے لئے ہدایات دیے جائیں۔

---

[1] Elementary Algebra for Schools

ترتیب و اجتماع کے باب میں ہم ریورنڈ ڈبلیو۔ اے۔ وِٹ ورتھ[ا]
کے نہایت مرہونِ احسان ہیں جنہوں نے ہمیں ازراہِ کرم اپنی کتاب Choice and Chance میں کے ثبوتوں کے استعمال کرنے کی اجازت دی۔ کئی سالوں تک ہم نے تعلیم دینے میں انہی ثبوتوں کو استعمال کیا ہے۔ اور چونکہ ان کا استدلال عام عقل اور ابتدائی اصولوں پر مبنی ہے اِس لئے ہمیں یقین ہے کہ ان ثبوتوں کی بناء پر جبر و مقابلہ کے اس حصہ کو سمجھنے میں مبتدی کو زیادہ آسانی ہوگی بہ نسبت ایسے ثبوتوں کے جو بالعموم جبر و مقابلہ کی دیگر کتب نصاب میں پائے جاتے ہیں۔

استدقاق اور اتساع کی بحث ہمیشہ مبتدی کے لئے پہلی مرتبہ قدرے مشکل معلوم ہوتی ہے۔ اِس میں شک نہیں کہ اِس مضمون کی اندرونی مشکلات درحقیقت زیادہ ہیں۔ احاطۂ ریاضی میں عام طور پر جو اہمیت اِس کو دیجاتی ہے اور جس نامکمل طریق پر اسے بحث میں لایا جاتا ہے اِن ہر دو وجوہ کی بنا پر یہ مشکلات اور بھی بڑھ جاتی ہیں۔ اس بنا پر اس باب کو ہم نے معمول سے ذرا بعد میں رکھا ہے۔ اِس کے حصّوں کی تشکیل اور ترتیب میں، نیز متن کی توضیح کے لئے مناسب امثلہ کے انتخاب میں نہایت غور وخوض سے کام لیا گیا ہے اور ہم نے اس سے پہلے انتہائی قیمتوں اور معدوم کسور کے دو ابواب درج کر دینے سے اس کو حتی الوسع زیادہ دلچسپ اور سہل بنانے کی کوشش کی ہے۔

سلسلوں کو جمع کرنے کے باب میں ہم نے "فرقوں کے طریقہ" پر اور نیز اِس کی وسیع اور اہم مثالوں پر بہت زور دیا ہے۔ اِس طریقہ کی بنیاد محدود فرقوں کے احصا میں ایک نہایت مشہور ضابطہ پر مبنی ہے جس کو خالص جبریہ ثبوت کے بغیر جبر و مقابلہ کے درس میں داخل کرنا نامناسب معلوم ہوتا ہے۔ محدود فرقوں کے ضابطہ کا جو ثبوت ہم نے دفعات ۳۹۵ اور ۳۹۶ میں دیا ہے اُس کے متعلق ہمارا خیال ہے کہ یہ بالکل نیا اور طبع زاد ہے اور اس ضابطہ کے مطابق "فرقوں کے طریقے" کی تشریح کے ضمن میں ہم نے سلسلوں کی چند ایسی دلچسپ

[ا] Rev. W. A. Whitworth

مثالیں درج کی ہیں جن کو اس کے بغیر بہت دیر تک ملتوی رکھنا پڑتا تھا۔
احتمال کے باب میں ہمیں ریورنڈ ٹی۔سی۔سمنز[1]۔کرائسٹ کالج[2] بریکن[3] سے نہایت اہم اور قابلانہ امداد ملی ہے۔ اور ہم تہِ دل سے اُن کے ممنون ہیں نہ صرف اِس لئے کہ انہوں نے کتاب پر نکتہ سنجی کر کے اِس کی اصلاح فرمائی بلکہ اس لئے بھی کہ اُنہوں نے بہت سی دلچسپ اور خود ساختہ مثالیں اندراج کے لئے بہم پہنچائیں۔

آج کل تحلیلی مخروطات یا ہندسۂ مجسمات تحلیلی کی کسی کتاب کو مقطعات اور ان کے استعمال کے متعلق معلومات حاصل کئے بغیر پڑھنا اور سمجھنا تقریباً ناممکن ہے۔ اس خیال سے ہم نے باب ۳۳ میں مقطعات پر مختصر اور ابتدائی بحث کی ہے۔ اور ہمیں امید ہے کہ طالب علم کو مضمون ریاضی کی تکمیل اور وسیع تعلیم کے لئے تیار کرنے میں یہ مختصر سا ابتدائی بیان کافی اور مفید ثابت ہوگا۔

آخری باب میں مساواتوں کے نظریہ پر کل مفید مسائل جو پہلے مطالعہ کے لئے مفید ہو سکتے ہیں درج کئے گئے ہیں۔ مساواتوں کا نظریہ جبر و مقابلہ کی تعلیم کے سلسلے میں اِس طرح قدرتی طور پر خود بخود پیدا ہو جاتا ہے کہ ایسے مسائل کو یہاں درج کرنے کے لئے جن کو بالعموم علیحدہ کتب درسیہ میں درج کیا جاتا ہے ہمیں کسی معذرت کی ضرورت نہیں در اصل پنتیسویں باب کا بہت سا حصہ اس منزل سے بہت پہلے پڑھ لینا فائدہ سے خالی نہیں۔ اور ابواب ماقبل کے مشکل دفعات سے قبل اس کا مطالعہ نہایت سہولت بخش ثابت ہوگا۔

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ ہر باب کو بذاتِ خود اتنا مکمل بنانے کی کوشش کی گئی ہے جتنا کہ ممکن ہے اِس لئے اِن کے مطالعہ کی ترتیب کو اُستاد کی رائے اور مصلحت کے لحاظ سے بدلا جا سکتا ہے باایں ہمہ اس کی سفارش کی جاتی ہے کہ جملہ دفعات جن پر یہ نشان ※ دیا گیا ہے پہلی قرأت میں ترک کی جا سکتی ہیں۔

کتاب ہذا کی ترتیب میں جن اصحاب اور کتب سے ہم نے مدد حاصل کی ہے

---

[1] T. C. Simmons [2] Christ's College [3] Brecon

اُن کے ضمن میں ایک کتاب ایسی اہم ہے جس کے متعلق یہ کہنا دشوار ہے کہ ہم اس کے کس حد تک زیرِ احسان ہیں۔ ٹاڈھنٹر کا الجبرا[1] فار سکولز اینڈ کالجز ایک عرصہ سے کتبِ درسیہ میں نہایت مشہور اور مسلمہ کتاب مانی جاتی ہے یہاں تک کہ موجودہ زمانہ میں جبر ومقابلہ کی کسی درسی کتاب کی تصنیف کا اس کی اثر پذیری سے مستغنی ہونا ناممکن ہے۔ با ایں ہمہ اگرچہ ٹاڈھنٹر کا الجبرا مسلسل ہمارے طلبہ کے استعمال میں رہا ہے تاہم ہم نے اس کی ترتیب وتشکیل سے بہت حد تک فائدہ نہیں اُٹھایا۔ بہت سے ابواب میں ہم نے اس امر کو فائدہ بخش تصور کیا ہے کہ متبادل ثبوت مندرج کئے جائیں۔ نیز ہم نے متن کی عبارت کی تکمیل کے لئے بہت سے نوٹوں کا اضافہ بھی کیا ہے۔ یہ نوٹ جو موجودہ کتاب میں متفرق مقامات پر پائے جاتے ہیں گذشتہ بیس سال کے عرصہ میں مختلف اوقات پر فراہم کئے گئے ہیں۔ اس لئے یہ امر مشکل ہو گیا ہے کہ جن صورتوں میں دیگر مصنفین سے مدد حاصل کی گئی ہے اُن کا شکریہ ادا کیا جائے۔ بہیئتِ مجموعی ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہم شلومچ[2]، سیرٹ[3] اور لورنٹ[4] کے رہینِ منت ہیں۔ انگریزی مصنفین میں ٹاڈھنٹر کے الجبرا کے علاوہ ہم نے اکثر ڈی مارگن[5]۔ کولینزو[6]۔ گروس[7] اور کرسٹل[8] کی تصنیفات سے مدد حاصل کی ہے۔

ریورنڈ[9] والسٹن ہولم، ڈی۔ ایس سی پروفیسر ریاضی رائل انڈین انجینئرنگ کالج کی اس عنایت کے ہم خاص طور پر ممنونِ احسان ہیں کہ انہوں نے ازراہِ کرم اپنی فراہم کردہ امثلہ کی فہرست میں سے ہمیں سوالات منتخب کرنے کی اجازت عطا فرمائی۔ اور اس سے ہمارے آخری ابواب کو جو فائدہ پہنچا ہم اس کا اظہار شکریہ کے بغیر نہیں کر سکتے۔

اب ہم دیگر احباب واصحاب کا شکریہ ادا کرتے ہیں جنہوں نے پروف کے مطالعہ اور تصحیح میں ہمیں بے حد مدد دی ہے۔ بالخصوص ہم ریورنڈ ایچ۔ سی واٹسن کلفٹن کالج کے مشکور ہیں کہ انہوں نے ازراہِ کرم تمام کتاب کی نظرِ ثانی

---

[1] Todhunter's Algebra for Schools & Colleges
[2] Schlômilch
[3] Serret
[4] Laurent [5] DeMorgan [6] Colenso [7] Gross [8] Chrystal
[9] Rev. J. Wolstenholme

فرمائی اور اس کے ہر حصہ میں بہت سی قابلِ قدر تجویزات پیش کیں۔

ایچ۔ ایس۔ ہال

مئی ۱۸۸۷ء ایس۔ آر۔ نائٹ

اشاعتِ سوم کا دیباجہ

اس اشاعت میں متن اور مثالیں فی الجملہ وہی ہیں جو اشاعت ما قبل میں تھیں لیکن چند دفعات بدل دی گئی ہیں اور سب مثالوں کی از سر نو تصدیق کی گئی ہے ہم نے اِس میں تین سو مثالوں کے ایک مجموعہ کا اضافہ بھی کیا ہے جو ترقی یافتہ اور اعلیٰ مدارج کے طلبا کے لئے مفید ثابت ہوگا۔ یہ مثالیں کلیتہً نہیں لیکن زیادہ تر وظائف کے اور سینٹ ہاؤس کے پرچوں سے حاصل کی گئی ہیں۔ مضمون کے ہر حصہ کی توضیح پر خاص توجہ دی گئی ہے اور مشہور یونیورسٹیوں اور سول سروس کے امتحانات میں سے بھی مناسب مواد فراہم کیا گیا ہے۔

مارچ ۱۸۸۹ء

فہرست مضامین

جبر و مقابلہ (حصہ دوم)

صفحہ	مضمون
	اٹھارہواں باب
	سُود اور سالیانہ
۱	کسی رقم مفروضہ کا سود اور کُل زر بحساب سودِ مفرد
۲	کسی رقم مفروضہ کی مِتّی اور قیمت حاضرہ بحساب سُودِ مفرد
۳	کسی رقم مفروضہ کا سُود اور کُل زر بحساب سُودِ مرکب
۴	ظاہری اور اصلی سالانہ شرح کا سُود
۵	کسی رقم مفروضہ کی قیمت حاضرہ اور مِتّی بحساب سُودِ مرکب
۶	امثلہ نمبری ۱۸ (ل)
۸	سالیانہ - تعریفات
۹	ایک سالیانہ ادا نہیں کیا گیا اُس کا کُل زر بحساب سُودِ مفرد
۱۰	ایک سالیانہ ادا نہیں کیا گیا اُس کا کُل زر بحساب سُودِ مرکب
۱۱	ایک سالیانہ کی قیمتِ حاضرہ بحساب سُودِ مرکب
۱۲	ایک ملتوی سالیانہ کی قیمتِ حاضرہ بحساب سُودِ مرکب

تیئیسواں باب

جزوی کسور

ستائیسواں باب

متوالی مسلسل کُسور

اٹھائیسواں باب

درجۂ دوم کی غیر معیّن مساواتیں

انتیسواں باب

سلسلوں کا جمع کرنا

تینتیسواں باب

چونتیسواں باب　۳۸۸

متفرق مسائل وامثلہ　〃

پینتیسواں باب

بسم اللہ الرحمن الرحیم

جبر و مقابلہ

اٹھارواں باب

سود اور سالیانہ

۲۲۹۔ اس باب میں ہم یہ بتائیں گے کہ کس طرح سود اور متی کے سوالات جبریہ ضوابط کو استعمال کرنے سے آسانی سے حل ہو جاتے ہیں۔

ہم الفاظ "سود"، "متی" اور قیمت حاضرہ کو انہی معنوں میں استعمال کرینگے جن میں یہ اصطلاحیں علم حساب کی عام کتابوں میں استعمال ہوتی ہیں لیکن سود کی شرح کو اس طرح بیان کرنے کی بجائے کہ ۱۰۰ پونڈ پر فی سال اس قدر سود ہے یہ زیادہ آسان ہوگا کہ اس کو یوں بیان کیا جائے کہ ایک پونڈ کا ایک سال کا سود اس قدر ہے۔

۲۳۰۔ کسی رقم مفروضہ کا سود اور کل زر کسی دی ہوئی مدت کے لئے بحساب سود مفرد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اصل زر ص، پونڈ ہے، ایک پونڈ کا سود ایکسال میں ش ہے، نیز سالوں کی تعداد ن، سود س اور کل زر ک ہے چونکہ ص کا ایک سال کا سود ص ش ہے، اس لئے اس کا

ن سال کا سود ص ن ش١ ہے،

پس س = ص ن ش١ .... (۱)

نیز ک = ص + س

اس لئے ک = ص (۱ + ن ش١) ...... (۲)

(۱) اور (۲) سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگر ہمیں ص، ن، ش١، س میں سے یا ص، ن، ش١، ک میں سے کوئی تین مقادیر معلوم ہوں تو چوتھی مقدار معلوم ہو سکتی ہے۔

۱۳۲ - کسی رقم مفروضہ کی مُتّی اور قیمت حاضرہ کسی دی ہوئی مدت کے لئے بحساب سود مفرد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ رقم مفروضہ ص ہے اور قیمت حاضرہ ح، نیز مُتّی م ہے، ایک پونڈ کا ایک سال کا سود ش١ ہے اور سالوں کی تعداد ن ہے۔ چونکہ ح ایک ایسی رقم ہے جس کو سود پر قرض دینے سے ن سالوں میں اس کا کل زر ص ہو جاتا ہے اس لئے

ص = ح (۱ + ن ش١)

∴ ح = ص / (۱ + ن ش١)

اور م = ص − ح = ص − ص / (۱ + ن ش١)

∴ م = ص ن ش١ / (۱ + ن ش١)

نوٹ - م کی جو قیمت مساوات بالا سے حاصل ہوتی ہے، اس کو "اصلی مُتّی" کہتے ہیں۔ لیکن عملی طور پر جب کوئی رقم واجب الادا ہونیکی معینہ تاریخ سے قبل ادا کی جاتی ہے تو ساہوکار قرضہ میں سے اصلی مُتّی وضع کرنے کی بجائے قرضہ پر کا سود وضع کر لیتے ہیں، جو رقم اس طرح سے وضع کی جاتی ہے اس کو "ساہوکاری مُتّی" کہتے ہیں، پس

$$\text{ساہوکاری متی} = \text{ص ن ش}_{۱}$$

$$\text{اصلی متی} = \frac{\text{ص ن ش}_{۱}}{۱ + \text{ن ش}_{۱}}$$

مثال ۔ ۱۹۰۰ پونڈ کے لئے "اصلی متی" اور "ساہوکاری متی" کا فرق ۶ شلنگ ۸ پنس ہوتا ہے جبکہ رقم تاریخ مقررہ سے ۴ ماہ قبل ادا کیجائے شرح فیصد بحساب سود مفرد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ایک پونڈ کا ایک سال کا سود $\text{ش}_{۱}$ ہے، تب

$$\text{ساہوکاری متی} = \frac{۱۹۰۰\,\text{ش}_{۱}}{۳}$$

$$\text{اور اصلی متی} = \frac{\frac{۱۹۰۰\,\text{ش}_{۱}}{۳}}{۱ + \frac{۱}{۳}\text{ش}_{۱}}$$

$$\therefore \frac{۱۹۰۰\,\text{ش}_{۱}}{۳} - \frac{\frac{۱۹۰۰\,\text{ش}_{۱}}{۳}}{۱ + \frac{۱}{۳}\text{ش}_{۱}} = \frac{۱}{۳}$$

$$\text{جس سے}\quad ۱۹۰۰\,\text{ش}_{۱}^{۲} = ۳ + \text{ش}_{۱}$$

$$\therefore \text{ش}_{۱} = \frac{۱ \pm \sqrt{۲۲۸۰۰ + ۱}}{۳۸۰۰} = \frac{۱ \pm ۱۵۱}{۳۸۰۰}$$

$$\text{منفی اصل کو نظر انداز کرنے سے}\quad \text{ش}_{۱} = \frac{۱۵۲}{۳۸۰۰} = \frac{۱}{۲۵}$$

$$\therefore \text{شرح فیصد} = ۱۰۰\,\text{ش}_{۱} = ۴$$

۲۳۲ ۔ کسی رقم مفروضہ کا سود اور کل زر کسی دی ہوئی مدت میں بحساب سود مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اصل زر ص ہے، ایک پونڈ کا ایک سال کا کل زر

ش ہے، نیز سالوں کی تعداد ن ہے، سود س ہے اور کل زر ک ہے۔

پہلے سال کے آخر میں ص کا کل زر = ص ش اور چونکہ یہ دوسرے سال کے لئے اصل زر ہے اس لئے دوسرے سال کے آخر میں کل زر ص ش × ش یعنی $ص\,ش^{۲}$ ہے، اسی طرح سے تیسرے سال کے آخر میں کل زر = $ص\,ش^{۳}$ اور علیٰ ہذا القیاس ن سالوں کے بعد کل زر $ص\,ش^{ن}$ ہے۔

پس
$$ک = ص\,ش^{ن}$$
$$\therefore\ س = ص\,(ش^{ن} - ۱)$$

نوٹ۔ اگر ایک پونڈ کے ایک سال کے سود کو $ش_{۱}$ سے تعبیر کیا جائے تو

$$ش = ۱ + ش_{۱}$$

۲۳۳ - بیوپار میں اگر مدت کے اندر سال کی کوئی کسر شامل ہو تو رواجاً کسر مذکور کے لئے سود بحساب سود مفرد محسوب کیا جاتا ہے

پس ایک پونڈ کا کل زر $\frac{۱}{۲}$ سال میں $۱ + \frac{ش_{۱}}{۲}$ ہوگا اور ص کا کل زر بحساب سودِ مرکب $۴\frac{۲}{۳}$ سال میں $ص\,ش^{۴}\left(۱ + \frac{۲}{۳}\,ش_{۱}\right)$ ہوگا، اسی طرح سے ص کا کل زر $ن + \frac{۱}{ع}$ سال میں

$$ص\,ش^{ن}\left(۱ + \frac{ش_{۱}}{ع}\right)$$ ہوگا۔

اگر سود سال میں ایک سے زیادہ بار واجب الادا ہو تو ظاہری سالانہ شرح میں اور اُس شرح میں جو فی الحقیقت وصول ہوتی ہے اختلاف ہوتا ہے، مؤخر الذکر کو اصلی سالانہ شرح سے موسوم کیا جاسکتا ہے، مثلاً اگر سود سال میں دو بار واجب الادا ہو اور ظاہری سالانہ شرح $ش_{۱}$ ہو تو ایک سال کا کل زر نصف سال کے بعد

$ا + \frac{ش_۱}{۲}$ ہوگا اور اس لئے ایک پونڈ کا کل زر پورے سال میں $\left(ا + \frac{ش_۱}{۲}\right)^۲$ یعنی $ا + ش_۱ + \frac{ش_۱^۲}{۴}$ ہوگا پس اصلی سالانہ شرحِ سود $ش_۱ + \frac{ش_۱^۲}{۴}$ ہوگی۔

۲۳۴ - اگر سود سال میں ق بار واجب الادا ہو اور ظاہری سالانہ شرح $ش_۱$ ہو تو ظاہر ہے کہ ایک پونڈ کا سود $\frac{۱}{ق}$ سال کے ہر وقفہ کے لئے $\frac{ش_۱}{ق}$ ہوگا اس لئے ص کا کل زر ن سال میں یعنی ق ن وقفوں میں $ص\left(ا + \frac{ش_۱}{ق}\right)^{ن ق}$ ہوگا۔

اس کو یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ "ایک سال میں ق مرتبہ سود اصل زر میں بدل جاتا ہے"

اگر سود ہر لمحہ اصل زر میں متبدل ہوتا رہے تو ق لا انتہا بڑا ہو جاتا ہے۔ اس صورت میں کل زر کی قیمت نکالنے کے لئے فرض کرو کہ $\frac{ش_۱}{ق} = \frac{۱}{لا}$،

یعنی $ق = ش_۱ لا$

$$کل\ زر = ص\left(ا + \frac{ش_۱}{ق}\right)^{ق ن} = ص\left(ا + \frac{۱}{لا}\right)^{لا ن ش_۱}$$

$$= ص\left\{\left(ا + \frac{۱}{لا}\right)^{لا}\right\}^{ن ش_۱}$$

$= ص\, و^{ن ش_۱}$ [دیکھو حصہ اول، صفحہ ۴۵۹] کیونکہ ق کے لا انتہا بڑھ جانے سے لا بھی لا انتہا بڑھ جاتا ہے۔

۲۳۵ - کسی رقم مفروضہ کی قیمت حاضرہ اور ستی کسی دی ہوئی مدت کے لئے بحساب سود مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ رقم مفروضہ ص ہے اور قیمت حاضرہ ح ہے،

نیز متی م ہے، ایک پونڈ کا ایک سال کا کل زر ش ہے اور سالوں کی تعداد ن ہے۔ اب چونکہ ح ایک ایسی رقم ہے کہ اگر اس کو سود پر قرض دیا جائے تو ن سالوں میں اس کا کل زر ص ہو جاتا ہے اسلئے

$$ص = ح ش^{ن}$$

$$\therefore ح = \frac{ص}{ش^{ن}} = ص ش^{-ن}$$

$$اور\ م = ص (۱ - ش^{-ن})$$

مثال ۔ ۶۷۲ پونڈ کچھ عرصہ کے بعد واجب الادا ہیں، اس رقم کی قیمت حاضرہ ۱۲۶ پونڈ ہے، اگر سود مرکب بشرح $\frac{۱}{۶}$ ۴ فی صد محسوب کیا جائے تو مدت معلوم کرو جبکہ

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ء، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲ء،

یہاں $ش_{۱} = \frac{\frac{۲۵}{۶}}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲۴}$، اور $ش = \frac{۲۵}{۲۴}$

فرض کرو کہ سالوں کی تعداد ن ہے، تب

$$۶۷۲ = ۱۲۶ \left(\frac{۲۵}{۲۴}\right)^{ن}$$

$$\therefore ن\ لوک\ \frac{۲۵}{۲۴} = لوک\ \frac{۶۷۲}{۱۲۶}$$

$$ن\ لوک\ \frac{۱۰۰}{۹۶} = لوک\ \frac{۱۶}{۳}$$

$$\therefore ن\ (لوک\ ۱۰۰ - لوک\ ۹۶) = لوک\ ۱۶ - لوک\ ۳$$

$$ن = \frac{۴ لوک\ ۲ - لوک\ ۳}{۲ - ۵ لوک\ ۲ - لوک\ ۳}$$

ن = ٫۷۲۷۰۰ / ٫۰۱۷۷۳ = ۱۴ تقریباً

پس مدت تقریباً ۱۴ سال ہے۔

امثلہ نمبری ۱۸ (ل)

حسب ضرورت ذیل کے لوکارتم استعمال کئے جائیں،

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰ ، لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳

لوک ۷ = ٫۸۴۵۰۹۸۰ ، لوک ۱۱ = ۱٫۰۴۱۳۹۲۷

۱۔ ۱۰۰ پونڈ کا کل زر ۵۰ سال میں ۵ فیصد شرح سے بحساب سود مرکب معلوم کرو۔

لوک ۱۱۴٫۶۷۴ = ۲٫۰۵۹۴۶۵۰

۲۔ ایک رقم کا سود مفرد ۹۰ پونڈ ہے اور اُس کی مِتی اُسی شرح پر اسی مدت میں ۸۰ پونڈ ہے، رقم معلوم کرو۔

۳۔ ایک رقم ۵ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب کتنے سال میں دگنی ہو جائے گی۔

۴۔ ۱۰ ہزار پونڈ کی رقم ۸ سال کے بعد واجب الادا ہے، اِس کی قیمت حاضرہ ۵ فیصد شرح پہ بحساب سودِ مرکب دریافت کرو،

لوک ۶۷۶۸۳٫۹۴ = ۴٫۸۳۰۴۸۵۶

۵۔ ایک ہزار پونڈ ۱۰ فیصد شرح پہ بحساب سود مرکب کتنے سالوں میں ۲۵۰۰ پونڈ ہو جائینگے۔

۶۔ ثابت کرو کہ بحساب سود مفرد کسی رقم کی مِتی اُس رقم اور اُس کے سود کے اوسطِ موسیقی کے نصف کے مساوی ہوتی ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ ۵ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب کوئی رقم ۱۰۰ سال میں سو گُنا سے زیادہ ہو جاتی ہے۔

۸۔ کونسی رقم ۱۲ سال میں ۶ فیصد شرح پہ بحساب سودِ مرکب

ایک ہزار پونڈ ہو جائے گی۔

لوک ۱۰۶ = ۲،۰۲۵۳۰۵۹

لوک ۷۹۶۹۷ = ۴،۹۶۳۲۹۲ ۴

۹۔ ایک شخص ایک ساہوکار سے ۶۰۰ پونڈ قرض لیتا ہے اور ہر چھ ماہ کے بعد ۱۸ فیصد کا اضافہ کر کے نیا تمسک تحریر کر دیتا ہے۔ بتاؤ کہ کتنا وقت گزرنے کے بعد تمسک ۶ ہزار پونڈ تک پہنچ جائے گا۔

لوک ۱۱۸ = ۲،۰۷۱۸۸۲

۱۰۔ ایک فارد نگ ۲۰۰ سال میں ۶ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب کیا ہو جائے گا۔ معلوم ہے

لوک ۱۰۶ = ۲،۰۲۵۳۰۵۹

لوک ۱۱۵،۱۲۷۰ = ۲،۰۶۱۱۸۰۰

سالیانہ

۲۳۶۔ سالیانہ سے ایک ایسی معینہ رقم مراد ہوتی ہے جو خاص شرائط کے ماتحت مقررہ مساوی وقفوں کے بعد ادا کی جاتی ہے اور یہ ادائی ہر سال میں ایک بار یا کئی بار عمل میں آتی ہے۔ جب تک اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے ادائی مذکور سالانہ سمجھی جائے گی۔

میعادی سالیانہ سے مراد وہ سالیانہ ہے جو سالوں کی ایک خاص تعداد کے لئے غیر مشروط طور پر واجب الادا ہو۔

حیاتی سالیانہ سے مراد وہ سالیانہ ہے جو ایک شخص کو یا کئی اشخاص کے پس ماندہ کو تا زیست واجب الادا ہو۔

ملتوی سالیانہ سے وہ سالیانہ مراد ہے جو سالوں کی کسی خاص تعداد کے گزرنے کے بعد شروع ہو۔ جب یہ کہا جائے کہ سالیانہ ن سالوں کے لئے ملتوی کیا گیا ہے تو اس سے یہ مراد ہوتی ہے کہ سالیانہ ن سالوں کے بعد شروع ہو گا اور پہلی قسط (ن + ۱) ویں سال کے

آخر میں ادا کی جائے گی۔

اگر سالیانہ ایسا ہو جو ہمیشہ کے لئے جاری رہے تو اس کو دوامی سالیانہ یا محض **دوامی** کہتے ہیں، اگر یہ چند سالوں کے گذرنے کے بعد شروع ہونے والا ہو تو اسے **ملتوی دوامی** کہتے ہیں۔

اگر کوئی سالیانہ متعدد سالوں تک ادا نہ ہوا ہو تو اس کو یوں بیان کرتے ہیں کہ سالیانہ اتنے سالوں سے 'برآئندہ' ہے۔

۲۳۷۔ ایک سالیانہ سالوں کی ایک خاص تعداد تک ادا نہیں کیا گیا، اس کا کل زر بحساب سودِ مفرد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ ا ہے اور ایک پونڈ کا ایک سال کا سود ش۱ ہے، نیز سالوں کی تعداد ن ہے اور کل زر ک ہے

پہلے سال کے آخر میں واجب الادا رقم ا ہے، اور اس رقم کا کل زر باقی (ن - ۱) سال کے لئے ا + (ن - ۱) ش۱ ا ہے

دوسرے سال کے آخر میں مزید رقم ا واجب الادا ہے، اور اس رقم کا کل زر باقی (ن - ۲) سال کے لئے ا + (ن - ۲) ش۱ ا ہے۔

علیٰ ہذا القیاس

اب چونکہ ک یعنی کل زر مطلوبہ ان تمام کل زروں کے مجموعہ کے مساوی ہے

∴ ک = {ا + (ن - ۱) ش۱ ا} + {ا + (ن - ۲) ش۱ ا} + ...
.... {ا + ش۱ ا} + ا

جہاں سلسلہ بالا میں رقموں کی تعداد ن ہے

∴ ک = ن ا + (۱ + ۲ + ۳ + ... + ن-۱) ش۱ ا

= ن ا + ن(ن - ۱)/۲ ش۱ ا

۲۳۸۔ ایک سالیانہ سالوں کی ایک خاص تعداد تک ادا نہیں کیا گیا اس کا کل زر بحساب سود مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ ا ہے اور ایک پونڈ کا ایک سال کا کل زر ش ہے نیز سالوں کی تعداد ن ہے اور جملہ کل زر مطلوبہ ک ہے۔

پہلے سال کے آخر میں ا واجب الادا ہے اور اس کا کل زر باقی (ن-۱) سال کے لئے اش$^{ن-۱}$ کے مساوی ہے، دوسرے سال کے آخر میں ایک اور رقم ا واجب الادا ہے اور اس کا کل زر باقی (ن-۲) سال کے لئے اش$^{ن-۲}$ ہے، اور علیٰ ہذا القیاس

$$\therefore \text{ک} = \text{اش}^{\text{ن}-1} + \text{اش}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots \text{اش}^2 + \text{اش} + \text{ا}$$

$$= \text{ا}\,(1 + \text{ش} + \text{ش}^2 + \ldots\ldots \text{تا ن رقوم})$$

$$= \text{ا}\,\frac{\text{ش}^{\text{ن}} - 1}{\text{ش} - 1}$$

۲۳۹- جب سالیانوں کی قیمت حاضرہ معلوم کرنا ہو تو رواجاً سود کو ہمیشہ سود مرکب کے حساب سے شمار کرتے ہیں۔ اگر سود بحساب سود مفرد شمار کیا جائے تو نتائج ہمیشہ متضاد اور ناقابل اعتماد حاصل ہوتے ہیں۔ اس موضوع پر نیز سالیانوں کے مضمون کے متعلق مزید معلومات حاصل کرنے کے لئے طالب علم کو چاہئے کہ انسٹی ٹیوٹ آف ایکچوئریز (Institute of actuaries) کی کتب درسیہ حصص اول و دوم کا اور نیز انسائیکلوپیڈیا برٹانیکا {Encyclopaedia Britannica} میں سالیانوں کی دفعہ کا مطالعہ کرے۔

۲۴۰- ایک سالیانہ سالوں کی محدود تعداد کے لئے جاری رہنے والا ہے، اس کی قیمت حاضرہ بحساب سود مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ ا ہے، ایک پونڈ کا کل زر ایک سال میں ش ہے، نیز سالوں کی تعداد ن ہے اور مطلوبہ قیمت حاضرہ ح ہے۔

سالیانہ ا جو ایک سال کے بعد واجب الادا ہے اس کی قیمت حاضرہ ا ش$^{-1}$ ہے

سالیانہ ا جو ۲ سال کے بعد واجب الادا ہے اس کی قیمت حاضرہ ا ش$^{-2}$ ہے

سالیانہ ا جو ۳ سال کے بعد واجب الادا ہے اسکی قیمت حاضرہ ا ش$^{-3}$ ہے

علیٰ ہذا القیاس [ملاحظہ ہو دفعہ ۲۳۵]

اب چونکہ ح ان تمام حاضرہ قیمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہے

$$\therefore \text{ح} = \text{ا ش}^{-1} + \text{ا ش}^{-2} + \text{ا ش}^{-3} + \ldots \text{تا ن رقوم}$$

$$= \text{ا ش}^{-1} \frac{1 - \text{ش}^{-n}}{1 - \text{ش}^{-1}}$$

$$= \text{ا} \frac{1 - \text{ش}^{-n}}{\text{ش} - 1}$$

نوٹ۔ ک کی جو قیمت دفعہ ۲۳۸ میں معلوم کی گئی ہے اس کو ش^{n} پر تقسیم کرنے سے بھی مندرجہ بالا جواب حاصل ہو سکتا ہے۔

نتیجہ صریح ۔ اگر ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو اس سے دوامی سالیانہ کی قیمت حاضرہ کی قیمت حاصل ہوتی ہے

$$\text{ح} = \frac{\text{ا}}{\text{ش} - 1} = \frac{\text{ا}}{\text{ش}_1}$$

۲۴۱۔ اگر ایک سالیانہ ا کی قیمت حاضرہ ع ا ہو تو اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ سالیانہ کی قیمت ع سالوں کی خرید کے مساوی ہے۔

$$\text{دوامی سالیانہ کی صورت میں ع ا} = \frac{\text{ا}}{\text{ش}_1}$$

اس لئے $\text{ص} = \frac{1}{\text{ش}} = \frac{100}{\text{شرح فیصد}}$

اس سے ظاہر ہے کہ یہ معلوم کرنے کے لئے کہ کوئی دوامی سالیانہ کتنے سالوں کی خرید کے مساوی ہے ہمیں ۱۰۰ کو شرح فیصد پر تقسیم کرنا پڑتا ہے۔

بہت سے سرکاری تمسکوں میں، نیز رجسٹری شدہ کمپنیوں کے سرمایہ میں اور ریل کے حصے وغیرہ خریدنے میں جو روپیہ لگایا جاتا ہے وہ بعد ازاں واگذاشت نہیں کیا جا سکتا، اس لئے اس روپیہ سے جو مسلسل آمدنی ہوتی رہتی ہے وہ دوامی سالیانوں کی بہترین مثال ہے۔ گورنمنٹ کے اعتبار کی بہترین جانچ اس امر سے ہو سکتی ہے کہ اس کے تمسکات کی قیمت کتنے سالوں کی خرید کے مساوی ہے۔ مثلاً $2\frac{1}{2}$ فیصد والا ۹۰ پر کا "کونسول" ۳۶ سال کی خرید کے مساوی ہے، مصر کے ۴ فیصد والے سرمایہ کی قیمت ۹۶ پر ۲۴ سال کی خرید کے مساوی ہے اور آسٹریا کے ۵ فیصد والے سرمایہ کی قیمت ۸۰ پر صرف ۱۶ سال کی خرید کے مساوی ہے۔

۲۴۲ ـ ایک ملتوی سالیانہ ع سالوں کے بعد شروع ہوگا اور ن سال تک جاری رہے گا، اس کی قیمت حاضرہ بحساب سودِ مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ ا ہے، ایک پونڈ کا ایک سال کا کل زر ش ہے اور قیمت حاضرہ ح ہے۔

پہلی قسط (ع + ۱) ویں سال کے آخر میں ادا ہوتی ہے [دفعہ ۲۳۶] اس لئے پہلی، دوسری، تیسری قسطوں کی حاضرہ قیمتیں بالترتیب

$\text{ا ش}^{-(\text{ع}+1)}$، $\text{ا ش}^{-(\text{ع}+2)}$، $\text{ا ش}^{-(\text{ع}+3)}$، ....

ہیں ـــ

$$\therefore \text{ح} = \text{ا}\,\text{ش}^{-(\text{ع}+1)} + \text{ا}\,\text{ش}^{-(\text{ع}+2)} + \text{ا}\,\text{ش}^{-(\text{ع}+3)} + \dots \text{تا ن رقوم}$$

$$= \text{ا}\,\text{ش}^{-(\text{ع}+1)} \times \frac{1-\text{ش}^{-\text{ن}}}{1-\text{ش}^{-1}}$$

$$= \frac{\text{ا}\,\text{ش}^{-\text{ن}}}{\text{ش}-1} - \frac{\text{ا}\,\text{ش}^{-\text{ع}-\text{ن}}}{\text{ش}-1}$$

نتیجہ صریح ـ ایک ملتوی دوامی کا اجرا ع سالوں کے بعد شروع ہوگا، اس کی قیمت حاضرہ ضابطۂ ذیل سے حاصل ہوتی ہے

$$\text{ح} = \frac{\text{ا}\,\text{ش}^{-\text{ع}}}{\text{ش}-1}$$

۳۴۲ ـ مِلک سے ایسی جائداد مراد ہوتی ہے جس سے دوامی سالیانہ حاصل ہوتا رہے، اس دوامی سالیانہ کو محاصل کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ کسی مِلک کی قیمت وہی ہوگی جو ایک ایسے دوامی سالیانہ کی قیمت حاضرہ ہو جو محاصل کے مساوی ہے۔

دفعہ ۱۴۲ سے ظاہر ہے کہ اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ کسی پٹہ دار کو کھیت مول لینے کے لئے "کتنے سالوں کی خرید" ادا کرنی پڑتی ہے تو ۱۰۰ کو سالوں کی اس تعداد پر تقسیم کرنے سے ہم سود کی شرح فیصد معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال ـ ایک مِلک کا حق بازگشت ۶ سال کے بعد ہونے والا ہے اس کو ۲۰ ہزار پونڈ میں خرید کر لیا گیا ہے۔ بتاؤ کہ ۵ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب خریدار کو کس قدر محاصل وصول ہونے چاہئیں، معلوم ہے

لوک ۱٫۰۵ = ۰٫۰۲۱۱۸۹۳، لوک ۱٫۳۴۰۰۹۶ = ۰٫۱۲۷۱۳۵۸

یہاں محاصل ایک ایسے دوامی سالانہ کی سالانہ قیمت کے مساوی ہیں جس کا اجرا ۶ سال کے بعد ہونے والا ہو اور جو ۲۰ ہزار پونڈ میں

خریدی جاسکتی ہو۔

فرض کرو کہ سالیانہ کی قیمت ا پونڈ فی سال ہے، چونکہ ش = ۱.۰۵

اِس لئے $\text{۲۰۰۰۰} = \frac{\text{ا} \times (\text{۱.۰۵})^{-\text{۶}}}{\text{.۰۵}}$

$\therefore \text{ا} \times (\text{۱.۰۵})^{-\text{۶}} = \text{۱۰۰۰}$

لوک ا - ۶ لوک ۱.۰۵ = ۳

لوک ا = ۳.۱۲۷۱۳۵۸ = لوک ۱۳۴۰.۰۹۶

$\therefore$ ا = ۱۳۴۰.۰۹۶ اور محاصل = ۱۳۴۰ پونڈ ۱ شلنگ ۱۱ پنس

۲۴۴ - فرض کرو کہ پٹہ دار نے کوئی خاص رقم ادا کر کے کسی مِلک کا اجارہ (ع + ق) سالوں کے لئے حاصل کیا۔ ق سال گزر جانے پر وہ ع + ن سالوں کے لئے نیا اجارہ حاصل کرنا چاہتا ہے، جو رقم اُسے اِس غرض کے لئے ادا کرنی پڑتی ہے اسے ن سال کیلئے تجدید اجارہ کا 'جرمانہ' کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ مِلک کی سالانہ قیمت ا ہے، چونکہ پٹہ دار (ع + ن) سال میں سے ع سال کی رقم ادا کرچکا ہے اِس لئے جرمانہ اُس ملتوی سالیانہ ا کی قیمت حاضرہ کے مساوی ہوگا جو ع سال کے بعد شروع ہو کر ن سال تک جاری رہے، پس

$$\text{جرمانہ} = \frac{\text{ا}\,\text{ش}^{-\text{ع}}}{\text{ش}-\text{۱}} - \frac{\text{ا}\,\text{ش}^{-\text{ع}-\text{ن}}}{\text{ش}-\text{۱}} \quad \ldots\ldots \quad [\text{دفعہ ۲۴۲}]$$

امثلہ ۱۸ (ب)

جب تک کہ اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے سود کو ہمیشہ سود مرکب تصور کیا جائے۔

۱ - ۱۲۰ پونڈ کا ایک سالیانہ ۶ سال تک ادا نہیں ہوا۔ اگر

اس کا کُل زر ۶۲۷ پونڈ ہو تو بحساب سود مفرد شرح فیصد دریافت کرو۔
۲- ۱۰۰ پونڈ کے ایک سالیانہ کا کل زر ۲۰ سال میں $4\frac{1}{2}$ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب معلوم کرو، معلوم ہے
لوک ۱۰۴۵ = ۰۱۹۱۱۶۳ء،
لوک ۲۴۱۱۷ = ۱۳۸۲۳۲۶۰ء۱
۳- ایک مِلک ۲۷۵۰ پونڈ میں خریدی گئی، بتاؤ کہ یہ کس شرح فیصد کے موافق اجارہ پر دی جائے کہ مالک کو قیمت خرید پر ۴ فیصد نفع ہو۔
۴- ایک مِلک کی سالانہ آمدنی ۱۲۰ پونڈ ہے، اس کو ۴ ہزار پونڈ پر فروخت کرایا گیا ہے، سود کی شرح دریافت کرو۔
۵- اگر سود کی شرح $2\frac{1}{2}$ فی صد ہو تو بتاؤ کہ ایک مِلک کے لئے کتنے سال کی خرید، بطور قیمت ادا کرنی پڑے گی۔
۶- اگر ایک دوامی سالیانہ کی قیمت ۲۵ سال کی خرید کے مساوی ہو تو ۶۲۵ پونڈ کے ایک ایسے سالیانہ کا کُل زر دریافت کرو جو ۲ سال تک جاری رہنے والا ہو۔
۷- اگر ایک دوامی سالیانہ کی قیمت ۲۰ سال کی خرید کے مساوی ہو، تو وہ سالیانہ معلوم کرو جو ۳ سال تک جاری رہے اور جو ۲۲۲۵ پونڈ میں خریدا جا سکے۔
۸- ۴۰۰ پونڈ سالانہ کی ایک مِلک کا اجرا ۱۰ سال کے بعد شروع ہونے والا ہے، اگر سود کی شرح ۴ فیصد ہو تو بتاؤ کہ اب یہ مِلک کتنے میں خریدی جا سکتی ہے،
لوک ۱۰۴ = ۲۱۰۱۷۰۳۳ء،
لوک ۶۷۵۵۶۵ = ۸۲۹۶۶۷۰ء،
۹- اگر سود ہر لمحہ واجب الادا ہو تو بتاؤ کہ کونسی رقم ۵۰ سال میں ۲ فیصد شرح پر ۵۰۰ پونڈ ہو جائے گی (و$^{-1}$ = ۳۶۷۸ء)

۱۰ - ایک سالیانہ کے لئے جو ن سال تک جاری رہنے والا ہے "۲۵ سال کی خرید" ادا کرنی پڑتی ہے اور ایک اور سالیانہ کے لئے جو ۲ ن سال تک جاری رہنے والا ہے "۳۰ سال کی خرید" ادا کرنی پڑتی ہے، شرح فیصد دریافت کرو۔

۱۱ - ایک شخص ۵ ہزار پونڈ ۴ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب قرض لیتا ہے۔ اگر اصل زر اور سود دونوں کو ۱۰ مساوی سالانہ قسطوں سے ادا کرنا مطلوب ہو تو ہر ایسی قسط کی مقدار معلوم کرو

لوک ۱،۰۴ = ۰۱۷۰۳۳۳،

اور لوک ۶۷۵۵۶۵ = ۵،۸۲۹۶۶۷

۱۲ - ایک شخص کے پاس ۲۰ ہزار پونڈ رأس المال ہے اور اس پر اُسے ۵ فیصد کے حساب سے سود ملتا ہے، اگر وہ ۱۸۰۰ پونڈ سالانہ خرچ کرے تو ثابت کرو کہ وہ سترھویں سال کے اختتام سے قبل تباہ ہو جائے گا۔

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰،

لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳،

لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰،

۱۳ - ایک ملک کے سالانہ محاصل ۵۰۰ پونڈ ہیں، اور اسے ۲۰ سال کے لئے اجارہ پر دیا گیا ہے، اگر ۷ سال کے بعد پٹہ کی تجدید کرانا منظور ہو تو "جرمانہ" کی مقدار معلوم کرو جبکہ سود کی شرح ۶ فیصد ہو۔

لوک ۱۰۶ = ۲،۰۲۵۳۰۵۹،

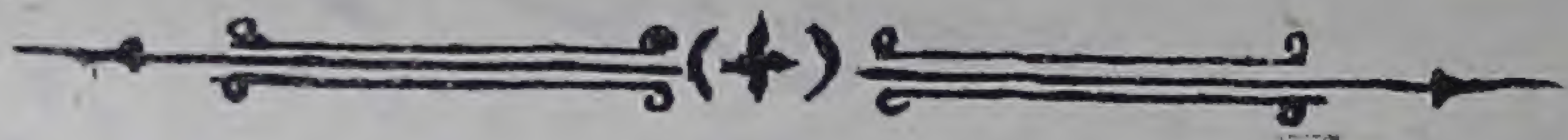
لوک ۴،۶۸۸۳۸۵ = ۶۷۱۰۲۳۳،

لوک ۳،۱۱۸۰۴۲ = ۴۹۳۸۸۲۰،

۱۴ - اگر ایک سالیانہ کو ن، ۲ ن، ۳ ن سال تک جاری رکھنے کے لئے بالترتیب ا، ب، ج سال کی خرید ادا کرنی پڑے تو ثابت کرو کہ

ا² - اب + ب² = اج

۱۵- ایک دوامی سالیانہ ایسا ہے کہ اس کی رُو سے پہلے سال کے آخر میں ۱۰ پونڈ واجب الادا ہوتے ہیں، دوسرے سال کے آخر میں ۲۰ پونڈ اور تیسرے کے آخر میں ۳۰ پونڈ علیٰ ہذا القیاس ہر سال کے آخر میں ۱۰ پونڈ کا اضافہ ہوتا جاتا ہے، اگر سود کی شرح ۵ فیصد فی سال ہو تو سالیانہ کی قیمت حاضرہ معلوم کرو۔



انیسواں باب

لا تساویات

۵۴۲ - کوئی مقدار ا کسی دوسری مقدار ب سے بڑی اُس وقت کہلاتی ہے جبکہ ا - ب مثبت ہو، مثلاً ۲ بڑا ہے - ۳ سے کیونکہ ۲ - (- ۳) یعنی ۵ مثبت ہے نیز مقدار ب، ا سے چھوٹی اُس وقت کہلاتی ہے جبکہ ب - ا منفی ہو مثلاً - ۵ چھوٹا ہے - ۲ سے کیونکہ - ۵ - (- ۲) یعنی - ۳ منفی ہے۔ ظاہر ہے کہ اس تعریف کے بموجب صفر کو ہر منفی مقدار سے بڑا سمجھنا چاہئے۔

باب ہذا میں تاوقتیکہ اس کے خلاف بالتصریح بیان نہ کیا جائے حروف سے ہمیشہ حقیقی مثبت مقداریں تعبیر ہونگی۔

۵۴۳ - اگر ا > ب تو ظاہر ہے کہ

ا + ج > ب + ج

ا - ج > ب - ج

ا ج > ب ج

$\frac{ا}{ج}$ > $\frac{ب}{ج}$

یعنی لا تساوی برقرار رہے گی اگر اس کے طرفین میں ایک ہی مثبت

مقدار جمع کردی جائے، یا طرفین سے ایک ہی مثبت مقدار تفریق کردی جائے یا طرفین کو ایک ہی مثبت مقدار سے ضرب یا تقسیم کر دیا جائے۔

۲۴۷ - اگر　ا - ج > ب

تو　دونوں جانب ج جمع کر دینے سے　ا > ب + ج

اس سے ظاہر ہے کہ کسی لاتساوی میں ایک طرف کی کسی رقم کو اس کی علامت بدل کر دوسری طرف منتقل کر سکتے ہیں۔

اگر ا > ب تو صریحاً ب < ا

یعنی اگر کسی لاتساوی کے طرفین کا باہم تبادلہ کر دیا جائے تو لاتساوی کی علامت الٹ جاتی ہے۔

اگر ا > ب تو ا - ب مثبت ہوگا اور ب - ا منفی،

یعنی - ا - (- ب) منفی ہوگا　اسلئے

- ا < - ب

پس اگر کسی لاتساوی میں اس کی سب رقوم کی علامات بدل دی جائیں تو لاتساوی کی علامت الٹ جاتی ہے۔

نیز اگر ا > ب تو - ا < - ب

اسلئے - اج < - ب ج

پس اگر کسی لاتساوی کے طرفین کو کسی منفی مقدار سے ضرب دیا جائے تو لاتساوی کی علامت الٹ جاتی ہے۔

۲۴۸ - اگر $ا_{۱} > ب_{۱}$، $ا_{۲} > ب_{۲}$، $ا_{۳} > ب_{۳}$، .... $ا_{م} > ب_{م}$

تو ظاہر ہے کہ

$$ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳} + ... + ا_{م} > ب_{۱} + ب_{۲} + ب_{۳} + ... + ب_{م}$$

اور $ا_{۱} ا_{۲} ا_{۳} .... ا_{م} > ب_{۱} ب_{۲} ب_{۳} .... ب_{م}$

۲۴۹ - اگر ا > ب اور ن اور ق مثبت صحیح عدد ہوں تو $\sqrt[ق]{ا} > \sqrt[ق]{ب}$

یعنی $ا^{\frac{1}{ق}} > ب^{\frac{1}{ق}}$ اور بنابریں $ا^{\frac{ن}{ق}} > ب^{\frac{ن}{ق}}$ یعنی $ا^{ن} > ب^{ن}$ جہاں ن کوئی مثبت مقدار ہے

نیز $\frac{1}{ا^{ن}} < \frac{1}{ب^{ن}}$ یعنی $ا^{-ن} < ب^{-ن}$

۲۵۰ - ہر حقیقی مقدار کا مربع مثبت ہوتا ہے، یعنی یہ صفر سے بڑا ہوتا ہے، مثلاً $(ا - ب)^2$ مثبت ہے

$\therefore ا^2 - 2اب + ب^2 > 0$

$\therefore ا^2 + ب^2 > 2اب$

اسی طرح سے $\frac{لا + ما}{2} > \sqrt{لا ما}$

یعنی دو مثبت مقداروں کا اوسطِ حسابی اُن کے اوسطِ ہندسی سے بڑا ہوتا ہے۔

اگر مقادیر مذکورہ برابر ہوں تو لاتساوی، تساوی بن جاتی ہے۔

۲۵۱ - جن لاتساویات میں ترتیب حروف متشاکل ہو اُن میں خصوصیت کے ساتھ دفعہ ماقبل کے نتائج بہت مفید اور کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

مثال ۱ - اگر ا، ب، ج مثبت مقادیر کو تعبیر کریں تو ثابت کرو کہ

$$ا^2 + ب^2 + ج^2 > ب ج + ج ا + ا ب$$

اور $2(ا^3 + ب^3 + ج^3) > ب ج (ب + ج) + ج ا (ج + ا) + ا ب (ا + ب)$

چونکہ ب^2 + ج^2 > ۲ ب ج ...... (۱)

ج^2 + ا^2 > ۲ ج ا

ا^2 + ب^2 > ۲ ا ب

اس لئے جمع کرنے سے ا^2 + ب^2 + ج^2 > ب ج + ج ا + ا ب

نیز یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ یہ جواب ا، ب، ج کی تمام حقیقی قیمتوں کیلئے درست ہے

نیز (۱) کی رو سے ب^2 - ب ج + ج^2 > ب ج ..... (۲)

$\therefore$ ب^3 + ج^3 > ب ج (ب + ج) .... (۳)

(۳) کے مماثل دو اور متشاکل لا تساویات لکھنے اور جمع کرنے سے

۲ (ا^3 + ب^3 + ج^3) > ب ج (ب + ج) + ج ا (ج + ا) + ا ب (ا + ب)

اس میں ایک بات قابل غور ہے وہ یہ کہ (۳)، (۲) کے طرفین کو جزو ضربی (ب + ج) سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے، لیکن اگر جزو ضربی (ب + ج) منفی ہو تو لا تساوی درست نہیں رہے گی۔

مثال ۲- اگر لا کوئی حقیقی قیمت اختیار کر سکے تو بتاؤ کہ رقوم لا^3 + ۱ اور لا^2 + لا میں سے کونسی رقم بڑی ہے۔

(لا^3 + ۱) - (لا^2 + لا) = لا^3 - لا^2 - (لا - ۱)

= (لا^2 - ۱) (لا - ۱)

= (لا - ۱)^2 (لا + ۱)

اس میں (لا - ۱)^2 ہمیشہ مثبت رہتا ہے، اس لئے لا^3 + ۱، لا^2 + لا سے بڑا ہوگا اگر (لا - ۱) مثبت ہو اور چھوٹا ہوگا اگر یہ منفی ہو

یعنی بڑا ہوگا اگر لا > - ۱ اور چھوٹا ہوگا اگر لا < - ۱
اگر لا = - ۱ تو لا تساوی، تساوی بن جاتی ہے۔

۲۵۲ - فرض کرو کہ ا اور ب دو مثبت مقداریں ہیں جن کا حاصل جمع ج ہے اور حاصل ضرب ض ہے۔

چونکہ ۴ ا ب = (ا + ب)^2 - (ا - ب)^2

اس لئے ۴ ض = ج^2 - (ا - ب)^2

اور ج^2 = ۴ ض + (ا - ب)^2

پس اگر ج کی قیمت معلوم ہو تو ض کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی اگر ا = ب اور اگر ض کی قیمت معلوم ہو تو ج کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہوگی اگر ا = ب، یا بلفاظ دیگر اگر دو مثبت مقداروں کا حاصل جمع معلوم ہو تو اُن کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا اگر یہ مقداریں مساوی ہوں اور اگر دو مثبت مقداروں کا حاصل ضرب معلوم ہو تو ان کا مجموعہ چھوٹے سے چھوٹا ہوگا اگر یہ مقادیر برابر ہوں۔

۲۵۳ - اُس حاصل ضرب کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو جس کے اجزائے ضربی کا حاصل جمع مستقل ہے۔

فرض کرو کہ ن اجزائے ضربی ا، ب، ج، ..... ک ہیں اور اُن کا حاصل جمع مستقل اور س کے مساوی ہے۔

حاصل ضرب ا ب ج .... ک پر غور کرو۔ فرض کرو کہ ا اور ب دو غیر مساوی اجزائے ضربی ہیں، اگر ہم ان اجزائے ضربی کی بجائے دو مساوی اجزائے ضربی $\frac{ا + ب}{۲}$، $\frac{ا + ب}{۲}$ لکھ دیں تو حسب دفعہ ماقبل اِن کا حاصل جمع تو نہیں بدلتا مگر حاصل ضرب بڑھ جاتا ہے، پس جب تک حاصل ضرب میں دو غیر مساوی اجزائے ضربی شریک رہیں ہم ہمیشہ اِن کے حاصل جمع کو کم و بیش کئے بغیر حاصل ضرب کو بڑھا سکتے ہیں۔ اِس سے ظاہر ہے کہ حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا

اگر اِیں کے اجزائے ضربی سب باہم مساوی ہوں۔ موجودہ صورت میں اِن اجزائے ضربی میں سے ہر ایک $\frac{س}{ن}$ کے مساوی ہے اور حاصل ضرب کی بڑی سے بڑی قیمت $\left(\frac{س}{ن}\right)^{ن}$ یا

$$\left(\frac{ا+ب+ج+\dots+ک}{ن}\right)^{ن}$$

ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر ا، ب، ج،... ک غیر مساوی ہوں تو

$$\left(\frac{ا+ب+ج+\dots+ک}{ن}\right)^{ن} > ا\,ب\,ج\dots ک$$

یعنی

$$\frac{ا+ب+ج+\dots+ک}{ن} > \left(ا\,ب\,ج\dots ک\right)^{\frac{۱}{ن}}$$

الفاظ "اوسطِ حسابی" اور "اوسطِ ہندسی" کے معنوں میں توسیع کرنے سے یہ نتیجہ ذیل کے الفاظ میں بھی بیان ہو سکتا ہے۔

مثبت مقادیر کی کسی تعداد کا اوسطِ حسابی اُن کے اوسطِ ہندسی سے بڑا ہوتا ہے۔

مثال۔ ثابت کرو کہ $\left(۱^{ر}+۲^{ر}+۳^{ر}+\dots+ن^{ر}\right)^{ن} > ن^{ن}\left(\underline{|ن}\right)^{ر}$

جہاں ر سے مراد کوئی حقیقی مقدار ہے۔

چونکہ $\frac{۱^{ر}+۲^{ر}+۳^{ر}+\dots+ن^{ر}}{ن} > \left(۱^{ر}\times۲^{ر}\times۳^{ر}\times\dots\times ن^{ر}\right)^{\frac{۱}{ن}}$

$\therefore \left(\frac{۱^{ر}+۲^{ر}+۳^{ر}+\dots+ن^{ر}}{ن}\right)^{ن} > ۱^{ر}\times۲^{ر}\times۳^{ر}\dots ن^{ر}$ یعنی $> \left(\underline{|ن}\right)^{ر}$

جس سے نتیجہ مطلوبہ آسانی سے حاصل ہو جاتا ہے۔

۲۵۴ — اگر ل، م، ن .... مثبت صحیح عدد ہوں تو

$ا^{ل} ب^{م} ج^{ن}$ ..... کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو جہاں

$ا + ب + ج + ...$ مستقل ہے۔

چونکہ ل، م، ن ..... مستقل ہیں اسلئے $ا^{ل} ب^{م} ج^{ن}$ ..... کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جب $\left(\frac{ا}{ل}\right)^{ل} \left(\frac{ب}{م}\right)^{م} \left(\frac{ج}{ن}\right)^{ن}$ کی قیمت بڑی سے بڑی ہو، لیکن مؤخرالذکر جملہ $ل + م + ن + ...$ اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جن کا حاصل جمع $ل\left(\frac{ا}{ل}\right) + م\left(\frac{ب}{م}\right) + ن\left(\frac{ج}{ن}\right) + ...$ یعنی $ا + ب + ج + ...$ ہے جو مستقل ہے۔

پس $ا^{ل} ب^{م} ج^{ن}$ کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ اجزائے ضربی

$$\frac{ا}{ل}،\ \frac{ب}{م}،\ \frac{ج}{ن}،\ .....$$

سب باہم مساوی ہوں یعنی

$$\frac{ا}{ل} = \frac{ب}{م} = \frac{ج}{ن} = \frac{ا + ب + ج + ...}{ل + م + ن + ...}$$

لہذا بڑی سے بڑی قیمت ہوگی $ل^{ل} م^{م} ن^{ن} .... \left(\frac{ا+ب+ج+.....}{ل+م+ن+.....}\right)^{ل+م+ن+...}$

مثال ۔ لا کی کسی حقیقی قیمت کے لئے جو تعداداً ا سے کم ہو $(ا + لا)^{۳} (ا - لا)^{۴}$ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو۔

جملۂ مذکور بڑے سے بڑا ہوگا جب $\left(\frac{ا+لا}{۳}\right)^{۳} \left(\frac{ا-لا}{۴}\right)^{۴}$ بڑے

سے بڑا ہو، لیکن اس جملہ کے اجزائے ضربی کا مجموعہ ۳ $\left(\frac{۱+لا}{۳}\right)$ + ۴ $\left(\frac{۱-لا}{۴}\right)$ یعنی ۲ ا ہے، اس لئے $(۱+لا)^۳ (۱-لا)^۴$ کی قیمت بڑی سے بڑی

اسوقت ہوگی جبکہ $\frac{۱+لا}{۳} = \frac{۱-لا}{۴}$ یعنی لا = $-\frac{۱}{۷}$

لہذا اس کی بڑی سے بڑی قیمت $\frac{۶^۳ \times ۸^۴}{۷^۷}$ ا^۷ ہے۔

۲۵۵۔ بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں اکثر اوقات اوپر کے طریقوں کی نسبت زیادہ آسانی سے درجہ دوم کی ایک مساوات کو حل کرنے سے معلوم ہو سکتی ہیں۔ اس کی چند مثالیں باب ۹ میں دی جا چکی ہیں، یہاں ہم ایک اور مثال درج کرتے ہیں۔

مثال۔ ایک طاق عدد کو دو ایسے صحیح حصوں میں تقسیم کرو جن کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہو۔

فرض کرو کہ مذکورہ بالا طاق عدد ۲ن + ۱ ہے اور اس کے حصے لا اور ۲ن + ۱ - لا ہیں، نیز ان کا حاصل ضرب ما ہے،

تب　$(۲ن + ۱) لا - لا^۲ = ما$

جس سے　$۲لا = (۲ن + ۱) \pm \sqrt{(۲ن + ۱)^۲ - ۴ما}$

لیکن علامت جذر کے اندر کی رقم مثبت ہونی چاہئے، اس لئے صریحاً ما، $\frac{۱}{۴}(۲ن + ۱)^۲$ یعنی $ن^۲ + ن + \frac{۱}{۴}$ سے بڑا نہیں ہو سکتا، نیز چونکہ ما صحیح عدد ہے اس لئے اس کی بڑی سے بڑی قیمت $ن^۲ + ن$ ہو سکتی ہے، ما کی اس قیمت کی رو سے لا = ن + ۱ یا ن پس دو حصے ن اور ن + ۱ ہیں۔

۲۵۶۔ بعض اوقات ہم ذیل کا طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔

مثال - $\frac{\text{(ا + لا) (ب + لا)}}{\text{ج + لا}}$ کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت معلوم کرو

ج + لا کی بجائے ما رکھنے سے

$$\text{جملۂ مذکور} = \frac{\text{(ا - ج + ما) (ب - ج + ما)}}{\text{ما}}$$

$$= \frac{\text{(ا - ج) (ب - ج)}}{\text{ما}} + \text{ما} + \text{ا - ج + ب - ج}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\text{(ا - ج) (ب - ج)}}{\text{ما}}} - \sqrt{\text{ما}} \right)^{2} + \text{ا - ج + ب - ج} + ۲\sqrt{\text{(ا - ج) (ب - ج)}}$$

لہذا جملہ مذکورہ چھوٹے سے چھوٹا ہوگا جب مربع رقم صفر ہو یعنی

جب $\text{ما} = \sqrt{\text{(ا - ج) (ب - ج)}}$

پس چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہے

$$\text{ا - ج + ب - ج} + ۲\sqrt{\text{(ا - ج) (ب - ج)}}$$

اور اس کے متناظر لا کی قیمت ہے $\sqrt{\text{(ا - ج) (ب - ج)}} - \text{ج}$

امثلہ نمبری ۱۹ (ا)

۱- ثابت کرو کہ (اب + لا ما) (ا لا + ب ما) > ۴ اب لا ما

۲- ثابت کرو کہ (ب + ج) (ج + ا) (ا + ب) > ۸ ا ب ج

۳- ثابت کرو کہ کسی حقیقی مثبت مقدار اور اس کے متکافی کا حاصل جمع کبھی ۲ سے کم نہیں ہو سکتا۔

۴- اگر ا^{2} + ب^{2} = ۱ اور لا^{2} + ما^{2} = ۱ تو ثابت کرو کہ ا لا + ب ما < ۱

۵- اگر ا^{2} + ب^{2} + ج^{2} = ۱ اور لا^{2} + ما^{2} + ی^{2} = ۱ تو ثابت کرو کہ

ا لا + ب ما + ج ی < ۱

۶- اگر ا > ب تو ثابت کرو کہ ا^{ا} ب^{ب} > ا^{ب} ب^{ا} اور

لوک $\frac{ب}{ا}$ < لوک $\frac{۱ + ب}{۱ + ا}$

۷- ثابت کرو کہ (لا^{2}ما + ما^{2}ی + ی^{2}لا) (لا ما^{2} + ما ی^{2} + ی لا^{2}) > ۹ لا^{2} ما^{2} ی^{2}

۸- بتاؤ کہ ۳ ا ب^{2} اور ا^{3} + ۲ ب^{3} میں سے کونسا بڑا ہے۔

۹- ثابت کرو کہ ا^{3} ب + ا ب^{3} < ا^{4} + ب^{4}

۱۰- ثابت کرو کہ ۶ ا ب ج < ب ج (ب + ج) + ج (ج + ا)
+ ا ب (ا + ب)

۱۱- بتاؤ کہ ب^{2} ج^{2} + ج^{2} ا^{2} + ا^{2} ب^{2} > ا ب ج (ا + ب + ج)

۱۲- لا کی مثبت قیمتوں کے لئے معلوم کرو کہ لا^{3} اور لا^{2} + لا + ۲ میں سے کونسا بڑا ہے۔

۱۳- ثابت کرو کہ اگر لا > ا تو لا^{3} + ۱۳ ا^{2} لا > ۵ ا لا^{2} + ۹ ا^{3}

۱۴- لا کی وہ بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو جس کے لئے ۷ لا^{2} + ۱۱ بڑا ہو لا^{3} + ۱۷ لا سے۔

۱۵- لا^{2} - ۱۲ لا + ۴۰ کی چھوٹی سے چھوٹی اور ۲۴ لا - ۸ - ۹ لا^{2} کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

۱۶- ثابت کرو کہ $\left(\frac{ن + ۱}{۲}\right)^{ن}$ > ن اور ۲ × ۴ × ۶ × .... × ۲ ن < (ن + ۱)^{ن}

۱۷- بتاؤ کہ (لا + ما + ی)^{3} > ۲۷ لا ما ی

۱۸- ثابت کرو کہ ن^{ن} > ۱ × ۳ × ۵ × .... (۲ ن - ۱)

۱۹ ۔ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو اور ۲ سے بڑا ہو تو بتاؤ کہ

$$۲^{ن} > ۱ + ن\sqrt{۲^{ن-۱}}$$

۲۰ ۔ ثابت کرو کہ $(\lfloor ن)^{۳} < ن^{ن}\left(\frac{ن+۱}{۲}\right)^{۲ن}$

۲۱ ۔ ثابت کرو کہ

(۱) $(لا+ما+ی)^{۳} > ۲۷(ما+ی-لا)(ی+لا-ما)(لا+ما-ی)$

(۲) $لا\,ما\,ی > (ما+ی-لا)(ی+لا-ما)(لا+ما-ی)$

۲۲ ۔ $(۷-لا)^{۴}(۲+لا)^{۵}$ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو جبکہ لا، ۷ اور -۲ کے درمیان ہو ۔

۲۳ ۔ $\frac{(۵+لا)(۲+لا)}{۱+لا}$ کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت دریافت کرو ۔

۲۵ ۔ اگر ا اور ب مثبت اور غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ $\frac{ا^{م}+ب^{م}}{۲} > \left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^{م}$ سوائے اُس صورت کے جبکہ م کوئی مثبت کسر واجب ہو ۔

ظاہر ہے کہ $ا^{م}+ب^{م} = \left(\frac{ا+ب}{۲}+\frac{ا-ب}{۲}\right)^{م} + \left(\frac{ا+ب}{۲}-\frac{ا-ب}{۲}\right)^{م}$

اور چونکہ $\frac{ا-ب}{۲}$ کم ہے $\frac{ا+ب}{۲}$ سے، اسلئے ہم اِن دونوں جملوں کو $\frac{ا-ب}{۲}$ کی صعودی قوتوں کی رقوم میں پھیلا سکتے ہیں (دیکھو دفعہ ۱۸۴)

$$\therefore \frac{ا^{م}+ب^{م}}{۲} = \left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^{م} + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲}\left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^{م-۲}\left(\frac{ا-ب}{۲}\right)^{۲}$$

$$+ \frac{م(م-۱)(م-۲)(م-۳)}{\lfloor ۴}\left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^{م-۴}\left(\frac{ا-ب}{۲}\right)^{۴} + \dots$$

(۱) اگر م کوئی مثبت صحیح عدد ہو یا کوئی منفی مقدار ہو تو بائیں جانب کی سب رقوم مثبت ہونگی، اسلئے $\frac{ا^م + ب^م}{۲} > \left(\frac{ا + ب}{۲}\right)^م$

(۲) اگر م مثبت ہو اور ۱ سے کم ہو تو بائیں جانب کی سب رقوم پہلی رقم کے بعد منفی ہونگی اسلئے $\frac{ا^م + ب^م}{۲} < \left(\frac{ا + ب}{۲}\right)^م$

(۳) اگر $م < ۱$ اور مثبت ہو تو م کو $\frac{۱}{ن}$ کے مساوی فرض کرو جہاں $ن > ۱$

$$تب \left(\frac{ا^م + ب^م}{۲}\right)^{\frac{۱}{م}} = \left(\frac{ا^{\frac{۱}{ن}} + ب^{\frac{۱}{ن}}}{۲}\right)^ن$$

$$\therefore \left(\frac{ا^م + ب^م}{۲}\right)^{\frac{۱}{م}} < \frac{\left(ا^{\frac{۱}{ن}}\right)^ن + \left(ب^{\frac{۱}{ن}}\right)^ن}{۲} \dots\dots (۲)$$ کی رو سے

$$\therefore \left(\frac{ا^م + ب^م}{۲}\right)^{\frac{۱}{م}} < \frac{ا + ب}{۲}$$

$$\therefore \frac{ا^م + ب^م}{۲} < \left(\frac{ا + ب}{۲}\right)^م$$

پس مسئلہ ثابت ہوا اگر م = ۰ یا ۱ تو لا تساوی، تساوی بن جاتی ہے

۲۵۸ - اگر ن مثبت مقادیر ا، ب، ج، ..... ک ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ا^م + ب^م + ج^م + \dots ک^م}{ن} > \left(\frac{ا + ب + ج + \dots ک}{ن}\right)^م$$

سوائے اُس صورت کے جب م کوئی مثبت کسر واجب ہو۔

فرض کرو کہ م کی قیمت کچھ ہی ہے جو صفر اور ایک کے درمیان واقع نہیں ہے۔

جملہ $ا^م + ب^م + ج^م + \dots + ک^م$ پر غور کرو اور فرض کرو کہ ا اور ب

غیر مساوی ہیں، اگر ہم ا اور ب، دونوں کی بجائے دو مساوی مقادیر $\frac{ا+ب}{۲}$، اور $\frac{ا+ب}{۲}$ درج کردیں تو ایسا کرنے سے $ا + ب + ج + \dots + ک$ کی قیمت میں تو کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی لیکن $ا^{م} + ب^{م} + ج^{م} + \dots + ک^{م}$ کی قیمت کم ہو جاتی ہے

کیونکہ $ا^{م} + ب^{م} > ۲\left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^{م}$

پس جب تک مقادیر ا، ب، ج، ..... ک میں سے کوئی دو مقادیر غیر مساوی رہیں ہم ہمیشہ $ا + ب + ج + \dots + ک$ کی قیمت کو کم و بیش کئے بغیر $ا^{م} + ب^{م} + ج^{م} + \dots + ک^{م}$ کی قیمت کو کم کرسکتے ہیں۔

پس $ا^{م} + ب^{م} + ج^{م} + \dots + ک^{م}$ کی قیمت کم سے کم اس صورت میں ہوتی ہے جبکہ مقادیر ا، ب، ج، ..... ک سب باہم مساوی ہوں یعنی ہر ایک مقدار $\frac{ا+ب+ج+\dots+ک}{ن}$ کے مساوی ہو۔

اس صورت میں $ا^{م} + ب^{م} + ج^{م} + \dots + ک^{م}$ کی قیمت $ن\left(\frac{ا+ب+ج+\dots+ک}{ن}\right)^{م}$ کے مساوی ہوتی ہے

اس لئے اگر ا، ب، ج، ..... ک غیر مساوی ہوں تو

$$\frac{ا^{م}+ب^{م}+ج^{م}+\dots+ک^{م}}{ن} > \left(\frac{ا+ب+ج+\dots+ک}{ن}\right)^{م}$$

اگر م، صفر اور ایک کے درمیان واقع ہو تو ہم اسی طرح سے ثابت کرسکتے ہیں کہ لاتساوی کی علامت الٹ جائیگی۔

عام الفاظ میں اس مسئلہ کو یوں بھی بیان کرسکتے ہیں۔

ن مثبت مقادیر کی م ویں قوتوں کا اوسطِ حسابی ہمیشہ اُن مقداروں کے اوسطِ حسابی کی م ویں قوت سے بڑا ہوتا ہے باستثنائے اُس صورت کے جبکہ م صفر اور ایک کے درمیان واقع ہو۔

۲۵۹۔ ا اور ب مثبت صحیح عدد ہیں اور ا > ب، اگر لا کوئی مثبت مقدار ہو تو ثابت کرو کہ $\left(\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{\text{ا}} > \left(\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}}\right)^{\text{ب}}$

$$\left(\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{\text{ا}} = \text{۱} + \text{لا} + \left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{ا}}\right)\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} + \left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{ا}}\right)\left(\text{۱} - \frac{\text{۲}}{\text{ا}}\right)\frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\underline{|\text{۳}}} + \ldots\ldots (\text{۱})$$

اس سلسلہ میں ا + ۱ رقمیں ہیں اور

$$\left(\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}}\right)^{\text{ب}} = \text{۱} + \text{لا} + \left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{ب}}\right)\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} + \left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{ب}}\right)\left(\text{۱} - \frac{\text{۲}}{\text{ب}}\right)\frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\underline{|\text{۳}}} + \ldots\ldots (\text{۲})$$

اس سلسلہ میں ب + ۱ رقمیں ہیں۔
پہلی اور دوسری رقم کے بعد سلسلہ (۱) کی ہر ایک رقم سلسلہ (۲) کی متناظر رقم سے بڑی ہے، نیز چونکہ سلسلہ (۱) میں رقوم کی تعداد سلسلہ (۲) کی تعداد رقوم سے بڑی ہے اس لئے سلسلہ (۱) بڑا ہے سلسلہ (۲) سے، پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۶۰۔ ثابت کرو کہ اگر لا اور ما مثبت کسور واجب ہوں اور

$$\text{لا} > \text{ما} \text{ تو } \sqrt[\text{لا}]{\frac{\text{۱} + \text{لا}}{\text{۱} - \text{لا}}} > \sqrt[\text{ما}]{\frac{\text{۱} + \text{ما}}{\text{۱} - \text{ما}}}$$

$$\text{اب } \sqrt[\text{لا}]{\frac{\text{۱} + \text{لا}}{\text{۱} - \text{لا}}} > \text{ یا } < \sqrt[\text{ما}]{\frac{\text{۱} + \text{ما}}{\text{۱} - \text{ما}}}$$

$$\text{جیسے } \frac{\text{۱}}{\text{لا}} \text{ لوک } \frac{\text{۱} + \text{لا}}{\text{۱} - \text{لا}} > \text{ یا } < \frac{\text{۱}}{\text{ما}} \text{ لوک } \frac{\text{۱} + \text{ما}}{\text{۱} - \text{ما}}$$

لیکن $\frac{۱}{\text{لا}}$ لوک $\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}} = ۲\left(۱ + \frac{\text{لا}^{۲}}{۳} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۵} + \ldots\right)$ ... [دفعہ ۲۲۶]

اور $\frac{۱}{\text{ما}}$ لوک $\frac{۱+\text{ما}}{۱-\text{ما}} = ۲\left(۱ + \frac{\text{ما}^{۲}}{۳} + \frac{\text{ما}^{۴}}{۵} + \ldots\right)$

اِن دونوں سلسلوں میں سوائے رقم اول کے پہلے سلسلہ کی ہر ایک رقم دوسرے سلسلہ کی متناظر رقم سے بڑی ہے، اس لئے

$$\frac{۱}{\text{لا}}\ \text{لوک}\ \frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}} > \frac{۱}{\text{ما}}\ \text{لوک}\ \frac{۱+\text{ما}}{۱-\text{ما}}$$

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۶۱ — ثابت کرو کہ اگر لا $<$ ۱ تو $(۱+\text{لا})^{۱+\text{لا}}(۱-\text{لا})^{۱-\text{لا}} > ۱$

اِس سے مستنبط کرو کہ $\text{ا}^{\text{ا}}\ \text{ب}^{\text{ب}} > \left(\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲}\right)^{\text{ا}+\text{ب}}$

$(۱+\text{لا})^{۱+\text{لا}}(۱-\text{لا})^{۱-\text{لا}}$ کو ض سے تعبیر کرو

$$\text{لوک ض} = (۱+\text{لا})\ \text{لوک}\ (۱+\text{لا}) + (۱-\text{لا})\ \text{لوک}\ (۱-\text{لا})$$

$$= \text{لا}\left\{\text{لوک}\ (۱+\text{لا}) - \text{لوک}\ (۱-\text{لا})\right\} + \text{لوک}\ (۱+\text{لا})$$

$$+\ \text{لوک}\ (۱-\text{لا})$$

$$= ۲\,\text{لا}\left(\text{لا} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} + \frac{\text{لا}^{۵}}{۵} + \ldots\right) - ۲\left(\frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۴} + \frac{\text{لا}^{۶}}{۶} + \ldots\right)$$

$$= ۲\left(\frac{\text{لا}^{۲}}{۲\times۱} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۴\times۳} + \frac{\text{لا}^{۶}}{۶\times۵}\right)$$

پس لوک ض مثبت ہے اور اس لئے ض $>$ ۱

یعنی $(1+x)^{1+x}\,(1-x)^{1-x} > 1$

اس نتیجہ میں رکھو لا = ی/ع جہاں ع > ی

تب $\left(1+\frac{y}{a}\right)^{1+\frac{y}{a}}\left(1-\frac{y}{a}\right)^{1-\frac{y}{a}} > 1$

∴ $\left(\frac{a+y}{a}\right)^{a+y}\left(\frac{a-y}{a}\right)^{a-y} > 1$ یعنی

∴ $(a+y)^{a+y}\,(a-y)^{a-y} > a^{2a}$

اب ع + ی کو ا کے اور ع - ی کو ب کے مساوی رکھو جس سے

$a = \frac{A+B}{2}$

∴ $A^{A}B^{B} > \left(\frac{A+B}{2}\right)^{A+B}$

اشلہ نمبری ۱۹ (ب)

۱- ثابت کرو کہ $2(A^2+B^2+C^2) > (A+B+C)^2$

۲- ثابت کرو کہ $n(n+1)^3 < 8(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)$

۳- ثابت کرو کہ اگر م > ۱ تو پہلے ن جفت اعداد کی م ویں قوتوں کا حاصل جمع $n(n+1)^m$ سے بڑا ہوتا ہے۔

۴- اگر عہ اور بہ دو مثبت مقداریں ہوں اور عہ > بہ سے تو ثابت کرو کہ

$\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a} > \left(1+\frac{1}{b}\right)^{b}$

اس سے بتاؤ کہ اگر ن > ۱ تو $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ کی قیمت ۲ اور ۲٫۷۱۸... (؟)

کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

۵۔ اگر ا، ب، ج کی قیمتیں نزولی ترتیب میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{ا+ج}{ا-ج}\right)^{ا} > \left(\frac{ب+ج}{ب-ج}\right)^{ب}$$

۶۔ ثابت کرو کہ $\left(\frac{ا+ب+ج+\dots+ک}{ن}\right)^{ا+ب+ج+\dots+ک}$

$< ا^{ا}\,ب^{ب}\,ج^{ج}\dots ک^{ک}$

۷۔ ثابت کرو کہ اگر $م > ن$ تو $\frac{1}{م}$ لوک $(1+ا^{م}) < \frac{1}{ن}$ لوک $(1+ا^{ن})$

۸۔ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو اور $لا < 1$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1-لا^{ن+1}}{ن+1} > \frac{1-لا^{ن}}{ن}$$

۹۔ اگر ا، ب، ج سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں اور $ن > 1$ تو ثابت کرو کہ $ا^{ن}+ج^{ن} > 2ب^{ن}$

۱۰۔ اگر لا مثبت ہو اور ۴ا سے کم ہو تو $لا^{3}(4ا-لا)^{5}$ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو، نیز معلوم کرو کہ اگر لا کوئی کسر واجب ہو تو $لا^{\frac{1}{3}}(1-لا)^{\frac{1}{2}}$ کی بڑی سے بڑی قیمت کیا ہوگی۔

۱۱۔ اگر لا مثبت ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}\,(1+لا) < لا \text{ اور } > \frac{لا}{1+لا}$$

۱۲۔ اگر $لا+ما+ی=1$ تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{لا}+\frac{1}{ما}+\frac{1}{ی}$ کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت ۹ ہے اور $(1-لا)(1-ما)(1-ی) > 8\,لا\,ما\,ی$

۱۳۔ ثابت کروکہ $(ا + ب + ج + د)(ا^3 + ب^3 + ج^3 + د^3) > (ا^2 + ب^2 + ج^2 + د^2)^2$

۱۴۔ ثابت کروکہ ذیل کے دونوں جملے مثبت ہیں

$ا(ا - ب)(ا - ج) + ب(ب - ج)(ب - ا) + ج(ج - ا)(ج - ب)$

اور $ا^2(ا - ب)(ا - ج) + ب^2(ب - ج)(ب - ا) + ج^2(ج - ا)(ج - ب)$

۱۵۔ ثابت کروکہ اگر م > ن تو $(لا^م + ما^م)^ن < (لا^ن + ما^ن)^م$

۱۶۔ ثابت کروکہ $ا^ب \, ب^ا < \left(\frac{ا + ب}{2}\right)^{ا+ب}$

۱۷۔ ا، ب، ج حسب معمول ایک مثلث کے اضلاع کے طولوں کو تعبیر کرتے ہیں۔ ثابت کروکہ جملہ

(۱) $ا^2(ن - ق)(ن - ر) + ب^2(ق - ر)(ق - ن) + ج^2(ر - ن)(ر - ق)$

منفی نہیں ہوسکتا، جہاں ن، ق، ر کوئی حقیقی مقادیر ہیں۔

(۲) $ا^2 ما ی + ب^2 ی لا + ج^2 لا ما$ مثبت نہیں ہو سکتا اگر

$لا + ما + ی = 0$

۱۸۔ ثابت کروکہ $1! \, 3! \, 5! \ldots (2ن - 1)! > (ن!)^ن$

۱۹۔ اگر ا، ب، ج، د، ..... تعداد میں ک مثبت صحیح عدد ہوں جن کا حاصل جمع ن ہو اور ن کو ک پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت اور باقی بالترتیب ق اور ص ہوں تو ثابت کروکہ

$ا! \, ب! \, ج! \, د! \ldots\ldots$

کی کم سے کم قیمت $(ق!)^{ک - ص} \, ((ق + 1)!)^ص$ ہے۔

بیسواں باب

انتہائی قیمتیں اور کسور منعدم

۲۶۲ - اگر ا کوئی مستقل محدود مقدار ہو تو لا کو کافی طور پر بڑھانے سے ہم کسر $\frac{ا}{لا}$ کی قیمت کو جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں، بالفاظ دیگر لا کو کافی بڑا لینے سے $\frac{ا}{لا}$ کی قیمت صفر کے اتنی قریب لائی جا سکتی ہے جتنی ہم چاہیں۔ اس مفہوم کو مختصراً یوں بیان کرتے ہیں کہ "جب لا لامتناہی ہو تو $\frac{ا}{لا}$ کی انتہا یا نہایت صفر ہوتی ہے"۔

بخلاف اس کے جیسے جیسے لا کم ہوتا جاتا ہے کسر $\frac{ا}{لا}$ کی قیمت بڑھتی جاتی ہے اور ہم لا کو کافی حد تک چھوٹا کرنے سے $\frac{ا}{لا}$ کی قیمت کو اتنا بڑھا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں مثلاً جب لا صفر ہو جائے تو $\frac{ا}{لا}$ کی انتہا محدود نہیں رہتی۔ اس کو بالعموم یوں بیان کرتے ہیں کہ جب لا صفر ہو تو $\frac{ا}{لا}$ کی انتہائی قیمت لا متناہی ہو جاتی ہے۔

۲۶۳ - جب ہم یہ کہتے ہیں کہ کوئی مقدار لا انتہا بڑھ جاتی ہے یا لا متناہی ہو جاتی ہے تو اس سے ہماری یہ مراد ہوتی ہے کہ مقدار زیر بحث ہر بڑی سے بڑی مقدار سے جس کو ہم ذہن میں لا سکیں زیادہ ہو جاتی ہے

اسی طرح جب ہم یہ کہتے ہیں کہ کوئی مقدار لا انتہا چھوٹی ہو جاتی ہے تو اس سے ہماری یہ مراد ہوتی ہے کہ مقدار زیر بحث ہر چھوٹی سے چھوٹی مقدار سے جس کو ہم ذہن میں لا سکیں کم ہو جاتی ہے۔

کسی ایسی مقدار کی قیمت کو جو لا انتہا بڑی ہو جائے علامت ∞ کے ذریعے تعبیر کیا جاتا ہے، اور کسی ایسی مقدار کی قیمت کو جو لا انتہا چھوٹی ہو جا علامت ۰ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

۲۶۴۔ ان علامات کے استعمال سے دفعہ ۲۶۲ کے دو مطالب اس طرح ادا کئے جا سکتے ہیں

اگر لا، ∞ ہو تو $\frac{۱}{لا}$ ہوتا ہے ۰،

اگر لا، ۰ ہو تو $\frac{۱}{لا}$ ہوتا ہے ∞

لیکن طرز بیان کے اس مختصر طریقہ کو اختیار کرتے وقت یاد رہے کہ یہ علامتیں درحقیقت زیادہ مفصل و مشرح زبانی الفاظ کا محض اختصار ہیں۔

۲۶۵۔ اس سے قبل جہاں کہیں ہم نے لفظ "انتہا" کا استعمال کیا ہے طالب علم کو غالباً اس کا مفہوم سمجھنے میں کوئی دقت واقع نہیں ہوئی ہوگی لیکن چونکہ علم ریاضی کے اعلیٰ طبقوں کے لئے الفاظ "نہایت" اور "انتہائی قیمت" کے مفہوم کو زیادہ صحت اور عمدگی کے ساتھ سمجھ لینا نہایت ضروری ہے اس لئے ہم یہاں ان کے استعمال اور معانی کی مزید توضیح کر دینا مناسب سمجھتے ہیں۔

۲۶۶۔ تعریف۔ اگر کوئی تفاعل (ما = ف (لا) ایسا ہو کہ جیسے لا، ا کے قریب آتا جائے ف (لا) اور ایک ثابت مقدار ب کے فرق کو اتنا کم کر دینا ممکن ہو جتنا کہ ہم چاہیں تو اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ ما کی انتہا ب ہے جب لا مائل بہ ا ہو۔

مثلاً اگر سلسلہ $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \ldots$ کی ن رقموں کے مجموعہ کو ج سے تعبیر کیا جائے تو ج = $۲ - \frac{۱}{۲^{ن-۱}}$ ...... [دفعہ ۵۶]

یہاں ج، ن کا تفاعل ہے اور ن کو کافی بڑھانے سے $\frac{۱}{۲^{ن-۱}}$ کی قیمت اتنی کم کی جاسکتی ہے جتنی کہ ہم چاہیں، پس ہم کہہ سکتے ہیں کہ ج کی انتہا جب ن لامتناہی ہو جائے ۲ ہے۔

۲۶۷ — ہمیں جن جملوں سے واسطہ پڑیگا وہ اکثر اوقات ایسے سلسلوں پر مشتمل ہوں گے جن کی رقوم کسی مشترک حرف کی قوتوں کے لحاظ سے کسی خاص ترتیب میں ہوں، مثلاً

$$ا_0 + ا_1 لا + ا_2 لا^2 + ا_3 لا^3 + \dots\dots$$

اس میں $ا_0$، $ا_1$، $ا_2$ ... وغیرہ محدود مقداریں ہیں جو لا پر موقوف نہیں، سلسلہ بالا میں رقوم کی تعداد محدود یا غیر محدود ہو سکتی ہے۔ ایسے لئے مندرجہ بالا قسم کے جملوں کی انتہائی قیمتیں معلوم کرنے کے مسائل پر بحث کرنا مناسب معلوم ہوتا ہے

۲۶۸ — سلسلہ $ا_0 + ا_1 لا + ا_2 لا^2 + ا_3 لا^3 + \dots\dots$ کی انتہائی قیمت جبکہ لا انتہا کم ہو جائے $ا_0$ ہے۔

فرض کرو کہ سلسلہ بالا میں رقوم کی تعداد لا متناہی ہے۔
سروں $ا_1$، $ا_2$، $ا_3$ ..... وغیرہ میں فرض کرو کہ بڑے سے بڑا سر ب ہے۔ سلسلہ ہذا کو $ا_0$ + ج سے تعبیر کرو، تب

$$ج < ب لا + ب لا^2 + ب لا^3 + \dots\dots$$

اور اگر $لا < ۱$ تو $ج < \frac{ب لا}{۱ - لا}$

پس لا کو لا انتہا کم کردینے سے ج کو اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا کہ ہم چاہیں اس لئے سلسلۂ بالا کی انتہا $ا_0$ ہے۔
اگر تعدادِ رقوم محدود ہو تو ج کی قیمت اس کی مذکورہ بالا قیمت سے

مقابلتہً کم ہوگی پس مسئلہ زیربحث اس صورت میں بھی صریحاً درست ہوگا۔

۲۶۹۔ سلسلہ $\text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ا}_2\,\text{لا}^2 + \text{ا}_3\,\text{لا}^3 + \dots\dots$ میں لا کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے ہم کسی رقم کو اس کے بعد کی رقوم کے مجموعہ سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں اور لا کو کافی طور پر بڑا لینے سے ہم کسی رقم کو اس کے پہلے کی رقوم کے مجموعہ سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔

رقم $\text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^\text{ن}$ کی نسبت اسکے بعد کی سب رقوم کے مجموعہ کے ساتھ

$$\frac{\text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^\text{ن}}{\text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{لا}^{\text{ن}+1} + \text{ا}_{\text{ن}+2}\,\text{لا}^{\text{ن}+2} + \dots} = \frac{\text{ا}_\text{ن}}{\text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}+2}\,\text{لا}^2 + \dots} =$$

لا کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے ہم اس کسر کے نسب نما کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں بالفاظ دیگر ہم اس کسر کی قیمت کو اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔

نیز کسی رقم $\text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^\text{ن}$ کی نسبت اس کے پہلے کی سب رقوم کے مجموعہ کے ساتھ

$$\frac{\text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^\text{ن}}{\text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_{\text{ن}-2}\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots} = \frac{\text{ا}_\text{ن}}{\text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{ما} + \text{ا}_{\text{ن}-2}\,\text{ما}^2 + \dots\dots} \text{ ہے}$$

جہاں $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}}$

جب لا، لا انتہا بڑا ہو تو ما، لا انتہا چھوٹا ہوگا، پس مثال ماقبل کی مانند ہم کسر بالا کو اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔

۲۷۰۔ مسئلہ ماقبل کی ایک خاص صورت جو ذیل میں دی گئی ہے بہت مفید اور کارآمد ہے۔

$$\text{جملہ } \text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^\text{ن} + \text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \dots\dots \text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ا}_0$$

رقوم کی ایک محدود تعداد پر مشتمل ہے اور اس میں لا کی قوتیں نزولی

ترتیب میں ہیں، اس میں لا کو کافی طور پر چھوٹا کرنے سے ہم آخری رقم $ا_ن$ کو رقوم ماسبق کے حاصل جمع سے مقابلتہً اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں اور لا کو کافی طور پر بڑا لینے سے ہم ابتدائی رقم $ا_0 لا^ن$ کو رقوم مابعد کے حاصل جمع سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔

مثال ۱۔ ن کو کافی بڑا لینے سے ہم $ن^4 - 5ن^3 - 7ن + 9$ کی پہلی رقم کو باقی رقموں کے مجموعہ سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔ اس کے یہ معنی ہیں کہ ہم پورے جملہ کی بجائے صرف پہلی رقم یعنی $ن^4$ لے سکتے ہیں بشرطیکہ ن کو کافی بڑا بنانے سے جملہ مذکور اور $ن^4$ کے تفاوت کو حسب خواہش کم کر لیا جائے۔

مثال ۲۔ $\frac{3لا^3 - 2لا^2 - 4}{5لا^3 - 4لا + 8}$ کی انتہا معلوم کرو جبکہ (۱) لا، لامتناہی ہو اور (۲) لا صفر ہو

(۱) شمار کنندہ اور نسب نما میں ہم پہلی رقم کے سوائے باقی سب رقوم کو نظر انداز کر سکتے ہیں اسلئے انتہا مطلوبہ $\frac{3لا^3}{5لا^3} = \frac{3}{5}$ ہے۔

(۲) جب لا، لاانتہا چھوٹا ہو تو انتہا مطلوبہ $\frac{-4}{8}$ یعنی $-\frac{1}{2}$ ہوگی۔

مثال ۳۔ $\sqrt[لا]{\frac{1+لا}{1-لا}}$ کی انتہا معلوم کرو جب لا صفر ہو۔

فرض کرو کہ رقم مذکور ض کے مساوی ہے، تب لوکارتم لینے سے

$$لوک\,ض = \frac{1}{لا}\left\{لوک\,(1+لا) - لوک\,(1-لا)\right\}$$

$$= 2\left(1 + \frac{لا^2}{3} + \frac{لا^4}{5} + \dots\right) \quad \text{........ (دفعہ ۲۲۶)}$$

جس سے ظاہر ہے کہ لوک ض کی انتہا ۲ ہے، پس مطلوبہ انتہا کی قیمت $و^2$ ہے۔

کسورِ منعدم

۲۷۱ - فرض کرو کہ کسر

$$\frac{\text{لا}^2 + \text{ا لا} - ۲\,\text{ا}^2}{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}$$

کی انتہا دریافت کرنا مطلوب ہے جبکہ لا = ا

اگر ہم لا کو ا + ھ کے مساوی رکھیں تو جوں جوں لا کی قیمت ا کے قریب آتی جائے گی ھ کی قیمت صفر کے قریب آتی جائے گی۔

لا کی بجائے ا + ھ مندرج کرنے سے

$$\frac{\text{لا}^2 + \text{ا لا} - ۲\,\text{ا}^2}{\text{لا}^2 - \text{ا}^2} = \frac{۳\,\text{ا ھ} + \text{ھ}^2}{۲\,\text{ا ھ} + \text{ھ}^2} = \frac{۳\,\text{ا} + \text{ھ}}{۲\,\text{ا} + \text{ھ}}$$

جب ھ لا انتہا چھوٹا ہو تو اس جملہ کی انتہا $\frac{۳}{۲}$ ہو گی۔

اس سوال کو ہم ایک اور نقطۂ نظر سے بھی دیکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{لا}^2 + \text{ا لا} - ۲\,\text{ا}^2}{\text{لا}^2 - \text{ا}^2} = \frac{(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} + ۲\,\text{ا})}{(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} + \text{ا})} = \frac{\text{لا} + ۲\,\text{ا}}{\text{لا} + \text{ا}}$$

اس وقت لا = ا رکھنے سے جملہ مذکورہ بالا کی قیمت حسب سابق $\frac{۳}{۲}$ نکلتی ہے۔

اگر ہم جملہ زیر بحث $\frac{\text{لا}^2 + \text{ا لا} - ۲\,\text{ا}^2}{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}$ میں اختصار سے قبل لا = ا رکھیں تو ہم دیکھینگے کہ کسر بالا $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ کی شکل اختیار کر لیتی ہے جس کی قیمت معیّن نہیں کی جا سکتی۔ نیز ہم دیکھتے ہیں اس کا یہ شکل اختیار کرنا شمار کنندہ اور نسب نما دونوں میں جزو ضربی (لا - ا) کی موجودگی کی وجہ سے ہے۔

اب ہم جزو ضربی صفر پر تو تقسیم نہیں کر سکتے لیکن یہ ضرور ہے کہ

جب تک لا، ا کے عین مساوی نہیں ہوتا ہم جزو ضربی لا − ا کو شمار کنندہ اور نسب نما دونوں میں سے نکال سکتے ہیں۔

اس کے بعد ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے لا کی قیمت ا کے قریب آتی جاتی ہے، کسر زیر بحث کی قیمت ۳/۲ کے نزدیک ہوتی جاتی ہے یعنی دفعہ ۲۶۶ کی تعریف کے بموجب

اگر لا = ا تو (لا^۲ + ا لا − ۲ ا^۲)/(لا^۲ − ا^۲) کی انتہا ۳/۲ ہے۔

۲۶۷ — اگر ف (لا) اور فہ (لا)، لا کے دو تفاعل ہوں جن میں سے ہر ایک تفاعل لا کی کسی خاص قیمت ا کے لئے صفر ہو جائے تو کسر ف (لا)/فہ (لا) شکل صفر/صفر اختیار کرتی ہے، اس قسم کی کسر کو کسر غیر معیّن یا کسر منعدم کہتے ہیں۔

مثال ۱ — اگر لا = ۳ تو (لا^۳ − ۵ لا^۲ + ۷ لا − ۳)/(لا^۳ − لا^۲ − ۵ لا − ۳) کی انتہا دریافت کرو

جب لا = ۳ تو یہ کسر، صفر/صفر کی غیر معیّن صورت اختیار کرلیتی ہے، لیکن شمار کنندہ اور نسب نما دونوں میں سے جزو ضربی (لا − ۳) نکال دینے سے کسر بالا (لا^۲ − ۲ لا + ۱)/(لا^۲ + ۲ لا + ۱) رہ جاتی ہے اور جب لا = ۳ تو یہ ۱/۴ ہو جاتی ہے، پس ۱/۴ مطلوبہ انتہا ہے۔

مثال ۲ — کسر (√(۳ لا − ا) − √(لا + ا))/(لا − ا) کی قیمت جبکہ لا = ا، صفر/صفر ہو جاتی ہے، اس کی انتہا معلوم کرنے کے لئے شمار کنندہ اور نسب نما جزو ضربی کو اصم √(۳ لا − ا) − √(لا + ا) کی مزدوج اصم سے ضرب دو۔

تب کسر مذکور

$$\frac{(۳لا - ا) - (لا + ا)}{(لا - ا)(\sqrt{۳لا - ا} + \sqrt{لا + ا})} \quad یا \quad \frac{۲}{\sqrt{۳لا - ا} + \sqrt{لا + ا}}$$

ہو جائے گی۔ اس میں لا = ا رکھنے سے اس کی انتہا $\frac{۱}{\sqrt{۲ا}}$ نکلتی ہے۔

مثال ۳۔ کسر $\frac{۱ - \sqrt[۳]{لا}}{۱ - \sqrt[۵]{لا}}$ کی قیمت جب لا = ۱، $\frac{صفر}{صفر}$ ہو جاتی ہے اس کی انتہا معلوم کرنے کے لئے لا = ۱ + ھ رکھو اور مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلاؤ تب کسر مذکورہ

$$= \frac{۱ - (۱ + ھ)^{\frac{۱}{۳}}}{۱ - (۱ + ھ)^{\frac{۱}{۵}}} = \frac{۱ - (۱ + \frac{۱}{۳}ھ - \frac{۱}{۹}ھ^۲ + ...)}{۱ - (۱ + \frac{۱}{۵}ھ - \frac{۲}{۲۵}ھ^۲ + ...)}$$

$$= \frac{-\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹}ھ - .....}{-\frac{۱}{۵} + \frac{۲}{۲۵}ھ - .....}$$

جب لا = ۱ تو ھ = ۰، اس لئے مطلوبہ انتہا $\frac{۵}{۳}$ ہے۔

۲۷۳۔ بعض اوقات کسی مساوات کے سروں میں ایسا تعلق ہوتا ہے جس کی وجہ سے اس مساوات کی اصلیں غیر معیّن صورت اختیار کر لیتی ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ ا لا + ب = ج لا + د

تب (ا - ج) لا = د - ب

$$\therefore لا = \frac{د - ب}{ا - ج}$$

اب اگر ا = ج تو لا = $\frac{د - ب}{۰}$ یا ∞،

پس ایک سادہ (خطی) مساوات کی اصل لامتناہی ہوتی ہے اگر لا کا سر لا انتہا چھوٹا ہو۔

۴۷۔ ہمزاد مساواتوں

$$\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = \text{۰}$$

$$\text{اَ لا} + \text{بَ ما} + \text{جَ} = \text{۰}$$

کا حل $\text{لا} = \frac{\text{ب جَ} - \text{بَ ج}}{\text{ا بَ} - \text{اَ ب}}$ ، $\text{ما} = \frac{\text{ج اَ} - \text{جَ ا}}{\text{ا بَ} - \text{اَ ب}}$ ہے

اگر $\text{ا بَ} - \text{اَ ب} = \text{۰}$ تو لا اور ما دونوں لامتناہی ہو جاتے ہیں

اس صورت میں $\frac{\text{اَ}}{\text{ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{ب}}$ (جو فرض کرو کہ) = م

اَ اور بَ کی قیمتیں بالترتیب ا م اور ب م دوسری مساوات میں مندرج کرنے سے یہ مساوات $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \frac{\text{جَ}}{\text{م}} = \text{۰}$ ہو جاتی ہے

اگر $\frac{\text{جَ}}{\text{م}}$ ، ج کے مساوی نہ ہو تو دو مساواتوں $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = \text{۰}$ اور $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \frac{\text{جَ}}{\text{م}} = \text{۰}$ کا اختلاف صرف رقم مطلق میں ہے، اور غیر مطابق ہونے کی وجہ سے یہ لا اور ما کی کسی محدود قیمت سے پوری نہیں ہو سکتیں۔

اگر $\frac{\text{جَ}}{\text{م}}$ ، ج کے مساوی ہو تو $\frac{\text{اَ}}{\text{ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{ج}}$ ، یعنی دونوں مساواتیں ایک دوسرے کے بالکل متماثل ہیں۔

اس صورت میں چونکہ $\text{ب جَ} - \text{بَ ج} = \text{۰}$ اور $\text{ج اَ} - \text{جَ ا} = \text{۰}$

اس لئے لا اور ما دونوں کی قیمتیں $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہو جاتی ہیں اور یہاں ان ہمزاد مساواتوں کا حل غیر معین ہو جاتا ہے، درحقیقت ایسی

صورت میں ہمارے پاس صرف ایک ہی مساوات ہے جس میں دو مجہول مقداریں شامل ہیں اور ایسی مساوات صریحاً مجہول مقادیر کی لا تعداد قیمتوں سے پوری ہو سکتی ہے۔ [ملاحظہ ہو دفعہ ۱۳۸]

طالب علم اگر ہندسۂ تحلیلی سے واقف ہے تو اس کو خطِ مستقیم کے ہندسہ کے موافق ان نتائج کو ہندسی معنی پہنانے میں کوئی دقت پیش نہیں آئے گی۔

۲۷۵ - اب ہم چند ایسی خصوصیات پر بحث کرتے ہیں جو مساوات درجہ دوم کے حل میں پیش آتی ہیں۔

فرض کرو کہ مساوات ا لا^{2} + ب لا + ج = ۰ ہے

اگر ج = ۰ تو ا لا^{2} + ب لا = ۰

جس سے لا = ۰ یا $-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ ، یعنی مساوات کی ایک اصل صفر ہے اور دوسری $-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

اگر ب = ۰ تو اصلیں یکجا مقدار کے مساوی لیکن مختلف العلامت ہیں [دفعہ ۱۱۸]

اگر ا = ۰ تو مساوات ب لا + ج = ۰ ہو جاتی ہے اور بظاہر یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس صورت میں درجہ دوم کی مساوات کی صرف ایک اصل رہ جاتی ہے، لیکن چونکہ درجہ دوم کی ہر مساوات کی دو اصلیں ہونی چاہئیں اس لئے ہم دوسری اصل کی قیمت پر حسب ذیل بحث کرتے ہیں۔

ابتدائی مساوات میں لا کی بجائے $\frac{1}{\text{م}}$ لکھو اور کسروں کو صاف کرو، تب

ج م^{2} + ب م + ا = ۰

اب ا = ۰ رکھنے سے ج م^{2} + ب م = ۰، اس کا حل ہے م = ۰، $-\frac{\text{ب}}{\text{ج}}$

یعنی $\text{لا} = \infty$ یا $-\frac{\text{ج}}{\text{ب}}$

پس اگر درجہ دوم کی کسی مساوات میں لا^{2} کا سر صفر ہو جائے تو مساوات کی ایک اصل لامتناہی ہوتی ہے۔

اعلیٰ ریاضی کی اکثر شاخوں میں یہ نتیجہ مندرجہ بالا الفاظ میں مرقوم کیا جاتا ہے لیکن مبتدی کو یاد رہے کہ درحقیقت یہ الفاظ ذیل کے تفصیلی الفاظ کا سہولت بخش اقتباس ہیں۔

مساوات $\text{ا}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج} = 0$ میں اگر ا بہت چھوٹا ہو تو مساوات کی ایک اصل بہت بڑی ہوتی ہے اور جب ا، لا انتہا کم ہوتا جاتا ہے تو یہ اصل لا انتہا بڑی ہوتی جاتی ہے، اس صورت میں محدود اصل اپنی انتہا $-\frac{\text{ج}}{\text{ب}}$ کے نہایت قریب آتی جاتی ہے۔

اسی طرح اُن صورتوں پر بھی جن میں ایک سے زیادہ سر مفقود ہوں بحث کی جا سکتی ہے۔

امثلہ نمبری ۲۰

ذیل کے جملوں کی انتہائیں معلوم کرو جب (۱) $\text{لا} = \infty$، (۲) $\text{لا} = 0$۔

۱- $\frac{(2\text{لا} - 3)(3 - 5\text{لا})}{7\text{لا}^{2} - 6\text{لا} + 4}$　　۲- $\frac{(3\text{لا}^{2} - 1)^{2}}{\text{لا}^{4} + 9}$

۳- $\frac{(3 + 2\text{لا}^{3})(\text{لا} - 5)}{(4\text{لا}^{3} - 9)(1 + \text{لا})}$　　۴- $\frac{(\text{لا} - 3)(2 - 5\text{لا})(3\text{لا} + 1)}{(2\text{لا} - 1)^{3}}$

۵- $\frac{1 - \text{لا}^{2}}{2\text{لا}^{3} - 1} \div \frac{1 - \text{لا}}{2\text{لا}^{2}}$　　۶- $\frac{(3 - \text{لا})(\text{لا} + 5)(2 - 7\text{لا})}{(7\text{لا} - 1)(\text{لا} + 1)^{3}}$

ذیل کے جملات کی انتہائیں معلوم کرو۔

۷- $\frac{\text{لا}^{3} + 1}{\text{لا}^{2} - 1}$ جبکہ $\text{لا} = -1$

۸- $\dfrac{\text{ا}^{\text{لا}} - \text{ب}^{\text{لا}}}{\text{لا}}$ جبکہ لا = ۰

۹- $\dfrac{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}{\text{لوک}\,(\text{۱} + \text{لا})}$ جبکہ لا = ۰

۱۰- $\dfrac{\text{و}^{\text{م لا}} - \text{و}^{\text{م ا}}}{\text{لا} - \text{ا}}$ جبکہ لا = ا

۱۱- $\dfrac{\sqrt{\text{لا}} - \sqrt{\text{۲ا}} + \sqrt{\text{لا} - \text{۲ا}}}{\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۴ا}^{\text{۲}}}}$ جب لا = ۲ا

۱۲- $\dfrac{\text{لوک}\,(\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا}^{\text{۴}})}{\text{۳لا}^{\text{۲}}(\text{۱} - \text{۲لا})}$ جب لا = ۰

۱۳- $\dfrac{\text{۱} - \text{لا} + \text{لوک لا}}{\text{۱} - \sqrt{\text{۲لا} - \text{لا}^{\text{۲}}}}$ جب لا = ۱

۱۴- $\dfrac{(\text{ا}^{\text{۲}} - \text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} + (\text{ا} - \text{لا})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}}{(\text{ا}^{\text{۳}} - \text{لا}^{\text{۳}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} + (\text{ا} - \text{لا})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}}$ جب لا = ا

۱۵- $\dfrac{\sqrt{\text{ا}^{\text{۲}} + \text{ا لا} + \text{لا}^{\text{۲}}} - \sqrt{\text{ا}^{\text{۲}} - \text{ا لا} + \text{لا}^{\text{۲}}}}{\sqrt{\text{ا} + \text{لا}} - \sqrt{\text{ا} - \text{لا}}}$ جب لا = ۰

۱۶- $\left\{\left(\dfrac{\text{ن} + \text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} - \dfrac{\text{ن} + \text{۱}}{\text{ن}}\right\}^{-\text{ن}}$ جب ن = ∞

۱۷- ن لوک $\dfrac{\text{و}}{\left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن} - \text{۱}}}$ جب ن = ∞

۱۸- $\sqrt[\text{لا}]{\dfrac{\text{ا} + \text{لا}}{\text{ا} - \text{لا}}}$ جب لا = ۰

اکیسواں باب

سلسلوں کا استدقاق اور اتساع

۲۷۶۔ ایسے جملہ کو جس کی مسلسل رقوم کسی خاص قانون کے موافق بنائی جائیں **سلسلہ** کہتے ہیں، وہ سلسلہ جس میں رقوم کی محدود تعداد شامل ہو **متناہی سلسلہ** کہلاتا ہے اور جس میں رقوم کی تعداد غیر محدود ہو اسے **لامتناہی سلسلہ** کہتے ہیں۔
اس باب میں ہم کسی سلسلہ کو ذیل کی شکل کے جملہ سے تعبیر کرینگے۔

$$ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \cdots + ع_ن + \cdots\cdots$$

۲۷۷۔ فرض کرو کہ ہمارے پاس ایک سلسلہ ہے جس میں ن رقوم شامل ہیں، اس سلسلہ کا حاصل جمع ن کا ایک تفاعل ہوگا۔ اگر ن لاانتہا بڑھ جائے تو سلسلہ کا حاصل جمع انتہائی صورت میں یا تو کسی محدود انتہا کی طرف مائل ہوگا یا لاانتہا بڑھ جائے گا۔
اگر کسی (لامتناہی) سلسلہ کی پہلی ن رقوم کا حاصل جمع تعداداً کبھی ایک خاص محدود مقدار سے تجاوز نہ کرے خواہ ن کو کتنا ہی کیوں نہ بڑھا دیا جائے تو ایسے سلسلہ کو **مستدق** سلسلہ کہتے ہیں۔
اگر کسی لامتناہی سلسلہ میں ن کو کافی طور پر بڑھانے سے اس کی پہلی ن رقوم کا حاصل جمع تعداداً ہر محدود مقدار سے بڑا بنایا جا سکے تو ایسے سلسلہ کو **متسع** سلسلہ کہتے ہیں۔

۲۷۸ - اگر ہم کسی سلسلہ کی پہلی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرسکیں تو یہ دیکھنے سے کہ ن کو لا انتہا بڑا بنانے پر حاصل جمع مذکور محدود رہتا ہے یا غیر محدود ہو جاتا ہے ہم فوراً معلوم کرسکتے ہیں کہ سلسلہ زیر بحث مستدق ہے یا متسع - مثلاً سلسلہ $۱ + لا + لا^{۲} + لا^{۳} + \dots$

کی پہلی ن رقموں کا حاصل جمع $\frac{۱ - لا^{ن}}{۱ - لا}$ ہے -

جب لا تعداداً ایک سے کم ہو تو حاصل جمع ایک محدود انتہا $\frac{۱}{۱ - لا}$ کے بتدریج قریب آتا جاتا ہے، اس لئے اس صورت میں سلسلہ مستدق ہوتا ہے -

اگر لا تعداداً ایک سے بڑا ہو تو ن کو کافی طور پر بڑا لینے سے پہلی ن رقموں کے حاصل جمع یعنی $\frac{لا^{ن} - ۱}{لا - ۱}$ کی قیمت کو ہر محدود مقدار سے بڑا بنایا جاسکتا ہے - اس لئے اس صورت میں سلسلۂ بالا متسع ہوتا ہے -

اگر لا = ۱ تو پہلی ن رقموں کا مجموعہ ن ہوگا، اس لئے سلسلہ متسع ہوگا -

اگر لا = -۱ تو سلسلہ بالا

$۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ \dots\dots$

ہو جاتا ہے - اس میں پہلی جفت رقوم کا مجموعہ صفر ہے اور پہلی طاق رقوم کا مجموعہ ایک ہے -

یعنی حاصل جمع صفر اور ایک کے درمیان اہتزاز کرتا ہے - لہذا یہ سلسلہ ان سلسلوں کے قبیل میں سے ہے جن کو اہتزازی سلسلے یا دوری مستدق سلسلے کہتے ہیں -

۲۷۹ - ایسی صورتیں اکثر پیش آتی ہیں جن میں ہم پہلی ن رقوم کا

حاصل جمع معلوم نہیں کر سکتے، اس لئے ذیل میں ہم اُن قواعد پر بحث کریں گے جن کے ذریعہ جمع کا عمل کئے بغیر یہ معلوم ہو سکے کہ کوئی دیا ہوا سلسلہ مستدق ہے یا متسع۔

۲۸۰ - اگر کسی سلسلہ کی متبادل رقوم مثبت اور منفی ہوں اور ہر رقم اپنی رقم ماقبل سے تعداداً کم ہو تو سلسلہ مستدق ہو گا
سلسلہ کو

$ع_1 - ع_2 + ع_3 - ع_4 + ع_5 - ع_6 + \ldots$ سے تعبیر کرو

جہاں $ع_1 > ع_2 > ع_3 > ع_4 \ldots\ldots$

اس سلسلہ کو ذیل کی ہر دو اشکال میں لکھا جا سکتا ہے

$$(ع_1 - ع_2) + (ع_3 - ع_4) + (ع_5 - ع_6) + \ldots\ldots \quad (1)$$

$$ع_1 - (ع_2 - ع_3) - (ع_4 - ع_5) - \ldots\ldots \quad (2)$$

پہلی شکل سے یہ واضح ہوتا ہے کہ سلسلہ کا حاصل جمع ایک مثبت مقدار کے مساوی ہے اور دوسری شکل سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ رقوم کی کسی تعداد کا مجموعہ $ع_1$ سے کم ہے۔ لہذا سلسلہ مستدق ہے

۲۸۱ - مثلاً سلسلہ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

مستدق ہے، دفعہ ۲۴۳ میں لا = ۱ رکھنے سے ظاہر ہے کہ اس سلسلہ کا حاصل جمع $لوگ_و ۲$ ہے۔

نیز سلسلہ

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \frac{7}{6} + \ldots\ldots$$

کی ہر ایک رقم اپنی رقم ماقبل سے تعداداً کم ہے، اس لئے یہ سلسلہ ستدق ہے۔ یہ سلسلہ ذیل کے دو سلسلوں کا مجموعہ ہے

$$ ١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٦} + \ldots\ldots (١) $$

$$ ١ - ١ + ١ - ١ + ١ - ١ + \ldots\ldots\ldots (٢) $$

اب (۱) تو لوک$_{و}$ ۲ کے مساوی ہے اور (۲) تعدادِ رقوم کے جفت ہونے کی صورت میں صفر کے اور طاق ہونے کی صورت میں ۱ کے مساوی ہے۔ پس سلسلہ ہذا ستدق ہے اور اسکا حاصل جمع تعدادِ رقوم کے جفت ہونے کی صورت میں لوک$_{و}$ ۲ کی اور طاق ہونے کی صورت میں ۱+ لوک$_{و}$ ۲ کی طرف استدقاق کرتا ہے۔

۲۸۲۔ اگر ایک لامتناہی سلسلہ کی سب رقوم کی علامت ایک ہی ہو اور ہر ایک رقم کسی محدود مقدار سے جو خواہ کتنی ہی چھوٹی ہو بڑی ہو تو سلسلہ متسع ہوتا ہے۔

کیونکہ اگر ہر ایک رقم کسی محدود مقدار ا سے بڑی ہو تو پہلی ن رقوم کا حاصل جمع ن ا سے بڑا ہوگا اور ظاہر ہے کہ ن کو کافی طور پر بڑا لینے سے ن ا کو ہمیشہ کسی خاص محدود مقدار سے بڑا بنایا جا سکتا ہے۔

۲۸۳۔ استدقاق اور اتساع کی جانچ کے متعلق مزید تحقیقات کرنے سے قبل ذیل میں ہم چند ایسے اصول درج کر دینا چاہتے ہیں جن کو کم و بیش حد تک علوم متعارفہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

(۱) اگر کوئی سلسلہ ستدق ہو تو یہ ستدق رہے گا اور اگر یہ متسع ہو تو متسع رہے گا جب اس میں اس کی رقوم کی ایک خاص تعداد جمع کر دی جائے یا نکال دی جائے، کیونکہ ان جمع کردہ

یا تفریق کردہ رقموں کا حاصل جمع ہمیشہ ایک محدود مقدار کے مساوی ہوتا ہے۔

(۲)، اگر ایک ایسا سلسلہ جس کی سب رقوم مثبت ہوں مستدق ہو تو یہ سلسلہ اس صورت میں بھی مستدق رہے گا جبکہ اس کی کل رقوم کو یا چند رقوم کو منفی بنا دیا جائے کیونکہ کسی سلسلہ کا حاصل جمع اس صورت میں صریحاً بڑے سے بڑا ہوتا ہے جبکہ اس سلسلہ کی سب رقوم کی علامت ایک ہی ہو۔

آئندہ ہم مان لیں گے کہ سب رقوم مثبت ہیں جب تک اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا گیا ہو۔

۲۸۴ - اگر کسی لامتناہی سلسلہ میں ایک مقررہ رقم سے شروع ہوکر اس کے بعد کی رقوم میں ہر رقم کی نسبت اپنی رقم ماقبل کے ساتھ ایک ایسی مقدار سے تعداداً کم رہے جو خود ایک سے تعداداً کم ہے تو سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ کسی سلسلہ میں ایک خاص رقم اور اس رقم کے بعد کا حصہ حسب ذیل ہے۔

$$ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + ع_۴ + \cdots\cdots$$

$$\text{اور}\quad \frac{ع_۲}{ع_۱} < ر،\quad \frac{ع_۳}{ع_۲} < ر،\quad \frac{ع_۴}{ع_۳} < ر \cdots\cdots$$

جہاں $ر < ۱$

$$\text{تب}\quad ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + ع_۴ + \cdots\cdots$$

$$= ع_۱\left(۱ + \frac{ع_۲}{ع_۱} + \frac{ع_۳}{ع_۲} \times \frac{ع_۲}{ع_۱} + \frac{ع_۴}{ع_۳} \times \frac{ع_۳}{ع_۲} \times \frac{ع_۲}{ع_۱} + \cdots\right)$$

$$< ع_۱\left(۱ + ر + ر^۲ + ر^۳ + \cdots\cdots\right)$$

یعنی $< \frac{\text{ع}}{\text{۱} - \text{ر}}$ چونکہ $\text{ر} < \text{۱}$

پس سلسلۂ ہذا مستدق ہے۔

۲۸۵۔ دفعہ ماقبل کے دعوے میں طالب علم کو چاہئے کہ الفاظ "ایک مقررہ رقم سے شروع ہو کر اس کے بعد کی رقوم میں" کی ضرورت کو اچھی طرح سے سمجھ کر ذہن نشین کرلے۔

ذیل کے سلسلہ پر غور کرو

$$\text{۱} + \text{۲لا} + \text{۳لا}^{\text{۲}} + \text{۴لا}^{\text{۳}} + \ldots\ldots + \text{ن لا}^{\text{ن-۱}} + \ldots\ldots$$

یہاں $\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن-۱}}} = \frac{\text{ن لا}}{\text{ن-۱}} = \left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{ن-۱}}\right)\text{لا}$

ن کو کافی طور پر بڑا بنانے سے ہم اس نسبت کی قیمت کو لا کے اتنا قریب لا سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں اور بالآخر ہر رقم کی نسبت رقم ماقبل کے ساتھ لا بنا سکتے ہیں، پس سلسلہ بالا مستدق ہوگا اگر $\text{لا} < \text{۱}$

لیکن نسبت $\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن-۱}}}$ ایک سے کم نہیں ہوگی جب تک کہ

$\frac{\text{ن لا}}{\text{ن-۱}}$ کم نہ ہو ایک سے یعنی ن بڑا نہ ہو $\frac{\text{۱}}{\text{۱-لا}}$ سے

اس سے ظاہر ہے کہ مستدق سلسلہ ایسا ہو سکتا ہے کہ اس کی رقوم ایک خاص تعداد تک بڑھتی رہیں اور اس کے بعد گھٹنا شروع ہوں، مثلاً سلسلہ بالا میں اگر $\text{لا} = \frac{\text{۹۹}}{\text{۱۰۰}}$ تو $\frac{\text{۱}}{\text{۱-لا}} = \text{۱۰۰}$، اسلئے رقوم ۱۰۰ ویں رقم سے پہلے گھٹنا شروع نہیں ہوتیں۔

۲۸۶۔ اگر کسی لامتناہی سلسلہ میں سب رقوم کی علامت ایک ہی ہو

اور ایک مقررہ رقم سے آگے اس کے بعد کی رقوم میں ہر رقم کی نسبت رقم ماقبل کے ساتھ ایک کے مساوی ہو یا ایک سے زیادہ ہو تو سلسلہ متسع ہوگا۔

فرض کرو کہ مقررہ رقم $ع_۱$ ہے، اگر نسبت مذکورہ ایک کے مساوی ہو تو رقوم مابعد میں سے ہر ایک رقم $ع_۱$ کے برابر ہوگی اور ن رقوم کا مجموعہ ن $ع_۱$ ہوگا، پس سلسلہ متسع ہوگا۔

اگر یہ نسبت ایک سے زیادہ ہو تو رقم مقررہ کے بعد ہر ایک رقم $ع_۱$ سے بڑی ہوگی اور ن رقوم کا مجموعہ ن $ع_۱$ سے بڑا ہوگا، یعنی سلسلہ متسع ہوگا۔

۲۸۷۔ آزمائش کے اس طریقہ کو عملی طور پر استعمال کرتے وقت یہ معلوم کرنے کی زحمت سے بچنے کے لئے کہ کونسی رقم کے بعد ہر رقم اپنی رقم ماقبل سے کم یا زیادہ ہونا شروع ہوتی ہے یہ زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے کہ نسبت $\frac{ع_ن}{ع_{ن-۱}}$ کی نہایت یا انتہا معلوم کرلی جائے جبکہ ن لا انتہا بڑا ہو

فرض کرو کہ یہ انتہا ل ہے

اگر ل < ۱ تو سلسلہ مستدق ہوگا (دفعہ ۲۸۴)

اگر ل > ۱ تو سلسلہ متسع ہوگا (دفعہ ۲۸۶)

اگر ل = ۱ تو سلسلہ مستدق ہوگا یا متسع، اور استدقاق و اتساع کی تحقیق کے لئے مزید آزمائش کی ضرورت ہوگی کیونکہ یہ ممکن ہے کہ کسر $\frac{ع_ن}{ع_{ن-۱}}$ ایک سے کم ہو اور ن کے لا انتہا بڑھ جانے سے انتہائی صورت میں یہ ایک ہوگئی ہو اس صورت میں ہم کوئی محدود مقدار ل نہیں بتا سکتے جو ایک سے کم ہو مگر ل سے زیادہ ہو۔ پس اس صورت میں دفعہ ۲۸۴ کی جانچ کام نہیں دیتی لیکن اگر $\frac{ع_ن}{ع_{ن-۱}}$ > ۱ اور ن کے لا انتہا بڑھ جانے سے

انتہائی صورت میں یہ ایک کے قریب آگئی ہو تو دفعہ ۲۸۶ کی رُو سے سلسلہ متسع ہوگا۔

ہم الفاظ " $\frac{ع_ن}{ع_{ن-۱}}$ کی انتہا جب ن لامتناہی ہو" کی بجائے

اختصاراً علامت نہا $\frac{ع_ن}{ع_{ن-۱}}$ استعمال کریں گے۔

مثال ۱۔ ایک سلسلہ کی ن ویں رقم $\frac{(ن+۱)لا^ن}{ن^۲}$ ہے، بتاؤ کہ سلسلہ مستدق ہے یا متسع۔

یہاں $\frac{ع_ن}{ع_{ن-۱}} = \frac{(ن+۱)لا^ن}{ن^۲} \div \frac{ن\,لا^{ن-۱}}{(ن-۱)^۲} = \frac{(ن+۱)(ن-۱)^۲}{ن^۳}لا$

$\therefore$ نہا $\frac{ع_ن}{ع_{ن-۱}} = لا$

پس اگر لا $<$ ۱ تو سلسلہ مستدق ہوگا
اور اگر لا $>$ ۱ تو سلسلہ متسع ہوگا

لیکن اگر لا = ۱ تو نہا $\frac{ع_ن}{ع_{ن-۱}} = ۱$، اور مزید آزمائش کی ضرورت ہوگی۔

مثال ۲۔ بتاؤ کہ ذیل کا سلسلہ مستدق ہے یا متسع

$۱ + ۲^۲لا + ۳^۲لا^۲ + ۴^۲لا^۳ + \ldots\ldots$

یہاں نہا $\frac{ع_ن}{ع_{ن-۱}} =$ نہا $\frac{ن^۲لا^{ن-۱}}{(ن-۱)^۲لا^{ن-۲}} = لا$

پس اگر لا $<$ ۱ تو سلسلہ مستدق ہوگا
اگر لا $>$ ۱ " " متسع ہوگا

اگر لا = ۱ تو سلسلہ بالا

$$۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + ۴^{۲} + \dots\dots$$

ہو جاتا ہے جو صریحاً متسع ہے

مثال ۳۔ سلسلہ

$$ا + (ا + د)ر + (ا + ۲د)ر^{۲} + (ا + ۳د)ر^{۳} + \dots + \{ا + (ن - ۱)د\}ر^{ن-۱} + \dots$$

میں $\text{نہا} \dfrac{ع_{ن}}{ع_{ن-۱}} = \text{نہا} \dfrac{ا + (ن - ۱)د}{ا + (ن - ۲)د} ر = ر$

پس اگر $ر < ۱$ تو سلسلہ بالا مستدق ہوگا اور اس کا حاصل جمع محدود ہوگا۔
[دیکھو دفعہ ۲۷۰، نتیجہ صریح]

۲۸۸۔ اگر دو لامتناہی سلسلوں میں سے ہر ایک کی سب رقوم مثبت ہوں اور ان سلسلوں کی متناظر رقوم کی نسبت ہمیشہ محدود رہے تو یہ سلسلے یا دونوں مستدق ہوں گے یا دونوں متسع۔

فرض کرو کہ یہ لامتناہی سلسلے

$$ع_{۱} + ع_{۲} + ع_{۳} + ع_{۴} + \dots\dots$$

اور

$$و_{۱} + و_{۲} + و_{۳} + و_{۴} + \dots\dots$$

ہیں تب کسر

$$\frac{ع_{۱} + ع_{۲} + ع_{۳} + ع_{۴} + \dots + ع_{ن}}{و_{۱} + و_{۲} + و_{۳} + و_{۴} + \dots + و_{ن}}$$

کی قیمت کسور

$$\frac{ع_{۱}}{و_{۱}}،\ \frac{ع_{۲}}{و_{۲}}،\ \frac{ع_{۳}}{و_{۳}}،\ \dots\dots،\ \frac{ع_{ن}}{و_{ن}}$$

میں سے بڑی سے بڑی کسر اور چھوٹی سے چھوٹی کسر کی قیمتوں کے درمیان واقع ہوگی۔ [دیکھو دفعہ ۱۴]

اور بنابریں ایک محدود مقدار کے مساوی ہوگی، فرض کرو کہ یہ محدود مقدار ل ہے

$$\therefore \text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \cdots + \text{ع}_n = \text{ل}\,(\text{و}_1 + \text{و}_2 + \text{و}_3 + \cdots + \text{و}_n)$$

لہذا اگر ایک سلسلہ کی قیمت محدود ہو تو دوسرے سلسلہ کی قیمت بھی محدود ہوگی، اور اگر ایک سلسلہ کی قیمت غیر محدود ہو تو دوسرے سلسلہ کی قیمت بھی غیر محدود ہوگی۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۸۹۔ مندرجہ بالا اصول نہایت مفید اور کار آمد ہے کیونکہ اسکی مدد سے ایک سلسلہ کا مقابلہ کسی اور ایسے سلسلہ سے کر سکتے ہیں جس کا مستدق یا متسع ہونا پہلے تحقیق ہو چکا ہے۔ دفعہ مابعد میں جس سلسلہ پر بحث کی گئی ہے اس کو بطور معاون سلسلہ کے لینا اکثر اوقات بہت مفید ثابت ہوتا ہے۔

۲۹۰۔ لامتناہی سلسلہ

$$\frac{1}{1^{\text{ق}}} + \frac{1}{2^{\text{ق}}} + \frac{1}{3^{\text{ق}}} + \frac{1}{4^{\text{ق}}} + \cdots\cdots$$

ہمیشہ متسع ہوتا ہے سوائے اُس صورت کے جبکہ ق مثبت ہو اور ایک سے بڑا ہو۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ $\text{ق} > 1$

پہلی رقم ۱ ہے، بعد کی دو رقمیں ملکر $\frac{2}{2^{\text{ق}}}$ سے کم ہیں، اِن کے بعد کی چار رقمیں ملکر $\frac{4}{4^{\text{ق}}}$ سے کم ہیں، ان کے بعد کی آٹھ رقمیں ملکر $\frac{8}{8^{\text{ق}}}$ سے کم ہیں، علیٰ ہذالقیاس پس کل سلسلہ

$1 + \frac{2}{2^{\text{ق}}} + \frac{4}{4^{\text{ق}}} + \frac{8}{8^{\text{ق}}} + \cdots\cdots$ کے حاصل جمع سے

کم ہے، لیکن موخرالذکر سلسلہ ہندسی سلسلہ ہے جس میں مشترک نسبت $\frac{2}{2^{\text{ق}}}$ ہے جوایک سے کم ہے کیونکہ ق > ۱، اس لئے یہ سلسلہ مستدق ہے اور بنابریں سلسلہ زیر بحث بھی مستدق ہے۔

صورت دوم۔ فرض کروکہ ق = ۱

تب سلسلہ زیر بحث، $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots$ ہوجاتا ہے

ظاہر ہے کہ تیسری اور چوتھی رقمیں ملکر بڑی ہیں $\frac{2}{4}$ یعنی $\frac{1}{2}$ سے، بعد کی چار رقمیں بڑی ہیں $\frac{4}{8}$ یعنی $\frac{1}{2}$ سے، ان کے بعد کی آٹھ رقمیں بڑی ہیں $\frac{8}{16}$ یعنی $\frac{1}{2}$ سے اور علیٰ ہذالقیاس، پس سلسلہ زیر بحث بڑا ہے

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$$

سے اور اس لئے متسع ہے .... (دیکھو دفعہ ۲۸۶)

صورت سوم۔ فرض کروکہ ق < ۱ یا منفی ہے۔

اس صورت میں سلسلہ زیر بحث کی ہر ایک رقم صورتِ دوم کے سلسلہ کی متناظر رقم سے بڑی ہے، لہٰذا اس صورت میں سلسلہ متسع ہے۔

پس سلسلہ زیر بحث ہمیشہ متسع ہوتا ہے سوائے اُس صورت کے جبکہ ق مثبت ہو اور ایک سے زیادہ ہو۔

مثال۔ ثابت کروکہ سلسلہ

$$\frac{2}{1}+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\cdots\cdots+\frac{\text{ن}+1}{\text{ن}^2}+\cdots\cdots$$

متسع ہے۔

اس سلسلہ کا مقابلہ سلسلہ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{\text{ن}}+\cdots\cdots$ سے کرو

اگر سلسلہ زیر بحث اور معاون سلسلہ کی ن ویں رقوم بالترتیب $ع_ن$ اور $ف_ن$ ہوں تو $\frac{ع_ن}{ف_ن} = \frac{ن+۱}{ن^۲} \div \frac{۱}{ن} = \frac{ن+۱}{ن}$

پس نہا $\frac{ع_ن}{ف_ن} = ۱$ لہٰذا یہ سلسلے یا دونوں متسع ہیں یا دونوں مستدق ہیں، لیکن چونکہ معاون سلسلہ متسع ہے اس لئے سلسلہ زیر تحقیق بھی متسع ہے۔

اس سے دفعہ ۲۸۷ کی مثال ۱ کا حل مکمل ہو جاتا ہے۔

۲۹۱۔ دفعہ ۲۸۸ کے قاعدہ سے استفادہ کرنے کے لئے ضروری ہے کہ $\frac{ع_ن}{ف_ن}$ کی انتہا محدود ہو اور یہ انتہا محدود ہو گی اگر ہم معاون سلسلہ ذیل کے طریقہ سے معلوم کریں۔

دئے ہوئے سلسلہ کی ن ویں رقم $ع_ن$ لو اور ن کی صرف سب سے بڑی قوتوں کو باقی رکھو۔ جو رقم اس طرح سے حاصل ہو اس کو $ف_ن$ سے تعبیر کرو، تب دفعہ ۲۷۰ کی رُو سے $\frac{ع_ن}{ف_ن}$ کی انتہا محدود ہوگی، بعد ازاں $ف_ن$ کو معاون سلسلہ کی ن ویں رقم کے طور پر لیا جا سکتا ہے

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ جس سلسلہ کی ن ویں رقم $\frac{\sqrt[۳]{۲ن^۲ - ۱}}{\sqrt[۴]{۳ن^۳ + ۲ن + ۵}}$ ہے وہ متسع ہے۔

جوں جوں ن بڑھتا جاتا ہے $ع_ن$ کی قیمت

$$\frac{\sqrt[۳]{۲ن^۲}}{\sqrt[۴]{۳ن^۳}} \quad \text{یا} \quad \frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۳}} \times \frac{۱}{ن^{\frac{۱}{۱۲}}}$$

کے قریب آتی جاتی ہے، پس اگر $و_ن = \frac{۱}{ن^{\frac{۲}{۳}}}$ تو $نہا \frac{ع_ن}{و_ن} = \frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۳}}$ جو ایک محدود مقدار ہے، ہم اُس سلسلہ کو جس کی $ن$ ویں رقم $\frac{۱}{ن^{\frac{۲}{۳}}}$ ہے معاون سلسلہ کے طور پر لے سکتے ہیں، لیکن چونکہ یہ معاون سلسلہ دفعہ ۲۹۰ کی رُو سے متسع ہے اس لئے سلسلہ زیر بحث بھی متسع ہے۔

مثال ۲۔ معلوم کرو کہ وہ سلسلہ جس میں $ع_ن = \sqrt[۳]{ن^۳ + ۱} - ن$ مستدق ہے یا متسع۔

یہاں $ع_ن = ن \left\{ \sqrt[۳]{۱ + \frac{۱}{ن^۳}} - ۱ \right\}$

$$= ن \left(۱ + \frac{۱}{۳ن^۳} - \frac{۱}{۹ن^۶} + \cdots - ۱ \right)$$

$$= \frac{۱}{۳ن^۲} - \frac{۱}{۹ن^۵} + \cdots\cdots$$

اگر ہم $و_ن = \frac{۱}{ن^۲}$ لیں تو

$$\frac{ع_ن}{و_ن} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۹ن^۳} + \cdots\cdots$$

$$\therefore نہا \frac{ع_ن}{و_ن} = \frac{۱}{۳}$$

لیکن معاون سلسلہ

$$\frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \cdots\cdots + \frac{۱}{ن^۲} + \cdots\cdots$$

مستدق ہے، اس لئے سلسلہ زیر بحث بھی مستدق ہے۔

۲۹۲۔ اگر (ا + لا)ن کو مسئلہ ثنائی سے پھیلایا جائے تو ثابت کرو کہ یہ پھیلاؤ مستدق ہوتا ہے جبکہ لا > ا

فرض کرو کہ تفصیل کی ر ویں اور (ر + ا) ویں رقمیں بالترتیب

عر اور عر+ا ہیں، تب

عر+ا / عر = (ن - ر + ا) / ر لا

جب ر > ن + ا تو یہ نسبت منفی ہوتی ہے، یعنی اگر لا مثبت ہو تو اس مقام سے رقوم سلسلہ متبادلاً مثبت اور منفی ہوتی ہیں اور اگر لا منفی ہو تو اس مقام کے بعد سلسلہ کی سب رقموں کی علامت وہی رہتی ہے۔

اب اگر ر، لامتناہی ہو تو نہا عر+ا / عر = لا (تعداداً)، اس لئے اگر سب رقوم کی علامت وہی ہو تو سلسلہ مستدق ہوتا ہے جب لا > ا، اور بنا بریں دفعہ ۲۸۳ کی رو سے یہ اُس صورت میں بھی مستدق ہوتا ہے جبکہ چند رقوم مثبت ہوں اور چند منفی۔

۲۹۳۔ ثابت کرو کہ صعودی قوتوں میں الا کی تفصیل لا کی سب قیمتوں کے لئے مستدق ہوتی ہے۔

یہاں عن / عن-ا = لا لوک و ا / ن - ا ، اس لئے نہا عن / عن-ا > ا خواہ لا کی قیمت کچھ ہی ہو۔ لہذا سلسلہ مستدق ہے۔

۲۹۴۔ ثابت کرو کہ لا کی صعودی قوتوں میں لوک (ا + لا) کی تفصیل مستدق ہوتی ہے جبکہ لا تعداداً ایک سے کم ہو۔

یہاں عن / عن-ا کی عددی قیمت = (ن - ا) / ن لا جسکی انتہا لا ہے،

پس سلسلہ مستدق ہوگا جب لا ایک سے کم ہو۔

اگر لا = ۱ تو سلسلہ $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \ldots$ ہو جاتا ہے

جو دفعہ ۲۸۴ کی رُو سے مستدق ہے۔

اگر لا = -۱ تو سلسلہ $-۱ - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} - \ldots$ ہو جاتا ہے

جو دفعہ ۲۹۰ کی رُو سے متسع ہے۔

اِس سے ظاہر ہے کہ صفر کا لوکارتم لامتناہی اور منفی ہوتا ہے اور یہ امر مساوات $\text{و}^{-\infty} = ۰$ پر غور کرنے سے بھی ظاہر ہے۔

۲۹۵۔ ذیل کی دو مثالوں کے جواب نہایت ضروری ہیں، باب ہذا میں اِن کی ضرورت پیش آئے گی۔

مثال ۱۔ $\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}}$ کی انتہا معلوم کرو جبکہ لا، لامتناہی ہو۔

لا = $\text{و}^{\text{ما}}$ رکھو، تب

$$\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}} = \frac{\text{ما}}{\text{و}^{\text{ما}}} = \frac{\text{ما}}{۱ + \text{ما} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{ما}^{۳}}{\lfloor ۳} + \ldots}$$

$$= \frac{۱}{\frac{۱}{\text{ما}} + ۱ + \frac{\text{ما}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\lfloor ۳} + \ldots}$$

نیز جب لا، لامتناہی ہو تو ما بھی لامتناہی ہوتا ہے اس لئے کسر بالا کی قیمت صفر ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ جب ن لامتناہی ہو تو $ن\,\text{لا}^{ن}$ کی انتہا صفر ہوتی ہے جبکہ لا $<$ ۱

فرض کرو کہ لا = $\frac{۱}{\text{ما}}$ یعنی ما $>$ ۱ نیز فرض کرو کہ $\text{ما}^{ن}$ = ی

یعنی ن لوک ما = لوک ی، تب

$$ن \,لاٰ^{ن} = \frac{ن}{ما^{ن}} = \frac{1}{ی} \frac{لوک\, ی}{لوک\, ما} = \frac{1}{لوک\, ما} \times \frac{لوک\, ی}{ی}$$

اب ظاہر ہے کہ جب ن لامتناہی ہو تو ی بھی لامتناہی ہوگا اور $\frac{لوک\, ی}{ی} = ۰$، نیز لوک ما محدود ہے اس لئے نہا ن لاٰ^{ن} = ۰

۲۹۶- بعض اوقات یہ معلوم کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے کہ اجزائے ضربی کی کسی لامتناہی تعداد کا حاصل ضرب محدود ہے یا غیر محدود۔

فرض کرو کہ حاصل ضرب ذیل کے ن اجزائے ضربی پر مشتمل ہے۔

$$ع_1 ع_2 ع_3 ع_4 \ldots ع_ن$$

اگر ن کے لا انتہا بڑھ جانے سے $ع_ن < 1$ تو حاصل ضرب صفر ہوگا اور اگر $ع_ن > 1$ تو حاصل ضرب غیر محدود ہوگا، لہٰذا اگر حاصل ضرب محدود رہے تو ضرور ہے کہ $ع_ن$ کی انتہا ایک ہو۔

$ع_ن$ کی بجائے $1 + و_ن$ رکھنے سے مذکورہ بالا حاصل ضرب

$$(1 + و_1)(1 + و_2)(1 + و_3) \ldots (1 + و_ن)$$ ہو جاتا ہے

اس حاصل ضرب کو ض سے تعبیر کرو اور لوکارتم لو۔ تب

$$لوک\, ض = لوک\,(1 + و_1) + لوک\,(1 + و_2) + \ldots + لوک\,(1 + و_ن)$$

.... (۱)

اگر یہ حاصل ضرب محدود ہو تو ضرور ہے کہ یہ سلسلہ مستدق ہو۔

ذیل کے سلسلہ کو معاون سلسلہ کے طور پہ لو۔

$$و_1 + و_2 + و_3 + \ldots + و_ن \ldots \quad (۲)$$

اب $\text{نہا}\ \frac{\text{لوک}\,(1+\text{ف}_{\text{ن}})}{\text{ف}_{\text{ن}}} = \text{نہا}\left(\frac{\text{ف}_{\text{ن}} - \frac{1}{2}\text{ف}_{\text{ن}}^{2} + \cdots}{\text{ف}_{\text{ن}}}\right) = 1$

کیونکہ جب $\text{ع}_{\text{ن}}$ کی انتہا ایک ہو تو $\text{ف}_{\text{ن}}$ کی انتہا صفر ہوتی ہے۔

پس اگر (۲) مستدق ہو تو (۱) بھی مستدق ہوگا اور حاصل ضرب محدود ہوگا۔

مثال ۔ ثابت کرو کہ جب ن لا متناہی ہو تو ذیل کے حاصل ضرب کی انتہا محدود ہوتی ہے

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{6}\times\cdots\cdots\times\frac{2\text{ن}-1}{2\text{ن}}\times\frac{2\text{ن}+1}{2\text{ن}}$$

یہ حاصل ضرب ۲ن اجزائے ضربی پر مشتمل ہے، اگر دو دو رقوم کے مسلسل زوجوں کو ع_1، ع_2، ع_3، ..... سے اور حاصل ضرب کو ض سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{ض} = \text{ع}_1\,\text{ع}_2\,\text{ع}_3 \cdots\cdots \text{ع}_{\text{ن}}$$

جہاں $\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{2\text{ن}-1}{2\text{ن}} \times \frac{2\text{ن}+1}{2\text{ن}} = 1 - \frac{1}{4\text{ن}^{2}}$

لیکن $\text{لوک ض} = \text{لوک ع}_1 + \text{لوک ع}_2 + \text{لوک ع}_3 + \cdots\cdots \text{لوک ع}_{\text{ن}}$ ......(۱)

اب ہمیں یہ دکھانا ہے کہ اس سلسلہ کی قیمت محدود ہے

$$\text{لوک ع}_{\text{ن}} = \text{لوک}\left(1 - \frac{1}{4\text{ن}^{2}}\right) = -\frac{1}{4\text{ن}^{2}} - \frac{1}{32\text{ن}^{4}} - \cdots\cdots$$

لہذا دفعہ ۲۹۱ مثال ۲ کے موافق یہ سلسلہ مستدق ہے اور مذکورہ حاصل ضرب محدود ہے۔

۲۹۷ ۔ علم ریاضی کے مسائل کی تحقیقات میں لا متناہی سلسلے بہت کثرت سے واقع ہوتے ہیں، ان کے متعلق ہر موقع پر یہ معلوم کرلینا نہایت ضروری ہے کہ یہ سلسلے مستدق ہیں یا نہیں، اگر ہم کسی

سلسلہ کو استعمال کرنے سے قبل اس کے استدقاق کے متعلق مناسب توثیق نہ کرلیں گے تو ممکن ہے کہ ہمارے محصلہ نتائج نہایت مہمل اور لغو ہوں - (دیکھو دفعہ ۱۸۳)

مثلاً اگر ہم $(۱ - \text{لا})^{-۲}$ کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلائیں تو

$$(۱ - \text{لا})^{-۲} = ۱ + ۲\,\text{لا} + ۳\,\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{لا}^{۳} + \ldots\ldots$$

لیکن اگر ہم بائیں جانب کے سلسلہ کا حاصل جمع ن رقموں تک دفعہ ۶ کے قاعدہ کے مطابق معلوم کریں تو

$$۱ + ۲\,\text{لا} + ۳\,\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{لا}^{۳} + \ldots + \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} = \frac{۱ - \text{لا}^{\text{ن}}}{(۱ - \text{لا})^{۲}} - \frac{\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}}}{۱ - \text{لا}}$$

اس سے $\frac{۱}{(۱ - \text{لا})^{۲}} = ۱ + ۲\,\text{لا} + ۳\,\text{لا}^{۲} + \ldots + \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{(۱ - \text{لا})^{۲}} + \frac{\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}}}{۱ - \text{لا}}$

ن کو لا انتہا بڑا کردینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$\frac{۱}{(۱ - \text{لا})^{۲}}$ کو سلسلہ $۱ + ۲\,\text{لا} + ۳\,\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots$ کا حقیقی معادل اسُی صورت میں کہہ سکتے ہیں جبکہ $\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{(۱ - \text{لا})^{۲}} + \frac{\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}}}{۱ - \text{لا}}$ معدوم ہو جائے

لیکن جب ن لا انتہا بڑا ہو جائے تو یہ مقدار لا انتہا بڑھی ہو جاتی ہے اگر $\text{لا} = ۱$ یا $\text{لا} > ۱$ اور لا انتہا چھوٹی ہو جاتی ہے اگر $\text{لا} < ۱$ (دیکھو دفعہ ۲۹۵)

پس ہم صرف اسُی صورت میں یہ کہہ سکتے ہیں کہ

$$\frac{۱}{(۱ - \text{لا})^{۲}} = ۱ + ۲\,\text{لا} + ۳\,\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{لا}^{۳} + \ldots \quad \text{تا لامتناہی}$$

جبکہ $\text{لا} < ۱$

اگر مسئلہ ثنائی کے مطابق $\frac{۱}{(۱ - \text{لا})^{۲}}$ کی مندرجہ بالا تفصیل کو لا کی

ہر قیمت کے لئے درست مانا جائے اور اسکی تفصیل کو $\frac{1}{(1-\text{لا})^2}$ کے معادل کے طور پر استعمال کیا جائے تو لازماً ہمارے نتائج غلط اور مہمل ہوں گے۔

بالفاظ دیگر ہم اس لا متناہی سلسلہ ۱ + ۲ لا + ۳ لا^2 + ۴ لا^3 + ... کو غلطی کے احتمال کے بغیر اپنی سلکِ استدلال میں صرف اسی صورت صورت میں لا سکتے ہیں جبکہ یہ سلسلہ مستدق ہو ورنہ نہیں۔

متسع سلاسل کی دقتوں کی وجہ سے ہمیں مجبوراً کسی سلسلہ اور اسکے جبریہ معادل میں تمیز کرنا پڑتا ہے، مثلاً لا کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو ہم ہمیشہ ۱ کو (۱ - لا)^2 پر تقسیم کرنے سے سلسلہ

۱ + ۲ لا + ۳ لا^2 + ...

کی جتنی رقمیں چاہیں حاصل کر سکتے ہیں اور اس طرح سے ایک معنے میں $\frac{1}{(1-\text{لا})^2}$ کو سلسلہ بالا کا جبریہ معادل کہا جا سکتا ہے، لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ فی الواقع یہ تعادل صرف اسی صورت میں درست ہوتا ہے جبکہ سلسلہ بالا مستدق ہو۔ اس نقطہ نظر کو ملحوظ رکھکر اگر ہم $\frac{1}{(1-\text{لا})^2}$ کو سلسلہ بالا کا تفاعل تکوینی کہیں تو شاید زیادہ مناسب ہوگا کسی سلسلہ کے تفاعل تکوینی) سے وہ تفاعل مراد ہے کہ اگر اس تفاعل کو جبرومقابلہ کے معمولی قواعد کے مطابق پھیلایا جائے تو سلسلۂ مذکور حاصل ہو۔

الفاظ "تکوینی تفاعل" کی تشریح مکمل طور پر متوالی سلسلوں کے ضمن میں کی جائے گی۔

امثلہ نمبری ۲۱ (ا)

معلوم کرو کہ ذیل کے سلسلے مستدق ہیں یا متسع

(۱) $\frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{لا}+1} + \frac{1}{\text{لا}+2} - \frac{1}{\text{لا}+3} + \ldots\ldots$

جہاں لا اور ا دونوں مثبت مقداریں ہیں۔

(۲) $\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}+\frac{۱}{۴\times۵}+\cdots\cdots$

(۳) $\frac{۱}{\text{لاما}}-\frac{۱}{(\text{لا}+۱)(\text{ما}+۱)}+\frac{۱}{(\text{لا}+۲)(\text{ما}+۲)}-\frac{۱}{(\text{لا}+۳)(\text{ما}+۳)}+\cdots$

جہاں لا اور ما دونوں مثبت مقداریں ہیں۔

(۴) $\frac{\text{لا}}{۱\times۲}+\frac{\text{لا}^۲}{۲\times۳}+\frac{\text{لا}^۳}{۳\times۴}+\frac{\text{لا}^۴}{۴\times۵}+\cdots\cdots$

(۵) $\frac{\text{لا}}{۱\times۲}+\frac{\text{لا}^۲}{۳\times۴}+\frac{\text{لا}^۳}{۵\times۶}+\frac{\text{لا}^۴}{۷\times۸}+\cdots\cdots$

(۶) $۱+\frac{۲^۲}{۲!}+\frac{۳^۲}{۳!}+\frac{۴^۲}{۴!}+\cdots\cdots$

(۷) $\frac{۱}{۲!}+\frac{۲}{۳!}+\frac{۳}{۴!}+\frac{۴}{۵!}+\cdots\cdots$

(۸) $۱+۳\,\text{لا}+۵\,\text{لا}^۲+۷\,\text{لا}^۳+۹\,\text{لا}^۴+\cdots\cdots$

(۹) $\frac{۲}{\text{ق}_۱}+\frac{۳}{\text{ق}_۲}+\frac{۴}{\text{ق}_۳}+\frac{۵}{\text{ق}_۴}+\cdots\cdots$

(۱۰) $۱+\frac{\text{لا}}{۲}+\frac{\text{لا}^۲}{۵}+\frac{\text{لا}^۳}{۱۰}+\cdots+\frac{\text{لا}^\text{ن}}{\text{ن}^۲+۱}+\cdots\cdots$

(۱۱) $\text{لا}+\frac{۳}{۵}\text{لا}^۲+\frac{۸}{۱۰}\text{لا}^۳+\frac{۱۵}{۱۷}\text{لا}^۴+\cdots+\frac{\text{ن}^۲-۱}{\text{ن}^۲+۱}\text{لا}^\text{ن}+\cdots$

(۱۲) $۱+\frac{۲}{۵}\text{لا}+\frac{۶}{۹}\text{لا}^۲+\frac{۱۴}{۱۷}\text{لا}^۳+\cdots+\frac{۲^\text{ن}-۲}{۲^\text{ن}+۱}\text{لا}^{\text{ن}-۱}+\cdots\cdots$

(۱۳) $\frac{۱}{\text{ق}_۱}+\frac{۱}{\text{ق}_۳}+\frac{۱}{\text{ق}_۵}+\cdots\cdots$

(۱۴) $\text{۲لا} + \frac{\text{۳لا}^{۲}}{۸} + \frac{\text{۴لا}^{۳}}{۲۷} + \dots\dots + \frac{(\text{ن}+۱)\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}^{۳}} + \dots\dots$

(۱۵) $\left(\frac{۲^{۲}}{۱^{۲}} - \frac{۲}{۱}\right)^{-۱} + \left(\frac{۳^{۳}}{۲^{۳}} - \frac{۳}{۲}\right)^{-۲} + \left(\frac{۴^{۴}}{۳^{۴}} - \frac{۴}{۳}\right)^{-۳} + \dots\dots$

(۱۶) $۱ + \frac{۱}{۲^{۲}} + \frac{۲^{۲}}{۳^{۳}} + \frac{۳^{۳}}{۴^{۴}} + \frac{۴^{۴}}{۵^{۵}} + \dots\dots$

(۱۷) جن سلسلوں کی ن ویں رقوم حسب ذیل ہیں اُن کی جانچ کرو

(۱) $\sqrt{\text{ن}^{۲}+۱} - \text{ن}$ (۲) $\sqrt{\text{ن}^{۴}+۱} - \sqrt{\text{ن}^{۴}-۱}$

(۱۸) ذیل کے سلاسل کی جانچ کرو۔

(۱) $\frac{۱}{\text{لا}} + \frac{۱}{\text{لا}+۱} + \frac{۱}{\text{لا}+۲} + \frac{۱}{\text{لا}+۳} + \dots\dots$

(۲) $\frac{۱}{\text{لا}} + \frac{۱}{\text{لا}-۱} + \frac{۱}{\text{لا}+۱} + \frac{۱}{\text{لا}-۲} + \frac{۱}{\text{لا}+۲} + \dots\dots$

جہاں لا کوئی مثبت کسر ہے۔

(۱۹) ثابت کرو کہ سلسلہ

$$۱ + \frac{\text{ق}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{ق}^{۳}}{\lfloor ۳} + \frac{\text{ق}^{۴}}{\lfloor ۴} + \dots\dots$$

ق کی تمام قیمتوں کے لئے مستدق ہے۔

(۲۰) ثابت کرو کہ لا متناہی سلسلہ

$$\text{ع}_{۱} + \text{ع}_{۲} + \text{ع}_{۳} + \dots\dots$$

مستدق ہوگا اگر نہا $\sqrt{\text{ع}_{\text{ن}}}$ کم ہو ایک سے اور متسع ہوگا اگر یہ بڑا ہو ایک سے۔

(۲۱) ثابت کرو کہ حاصل ضرب

$$\frac{۲}{۱}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۴}{۳}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۶}{۵}\cdots\cdots\times\frac{۲\text{ن}-۲}{۲\text{ن}-۳}\times\frac{۲\text{ن}-۲}{۲\text{ن}-۱}\times\frac{۲\text{ن}}{۲\text{ن}-۱}$$

محدود ہوگا جب ن غیر محدود ہو۔

(۲۲) ثابت کرو کہ اگر لا = ا تو $(۱+\text{لا})^{\text{ن}}$ کی تفصیل میں کوئی رقم لا متناہی نہیں ہوگی سوائے اُس صورت کے جبکہ ن منفی ہو اور تعداداً ایک سے بڑا ہو۔

۲۹۸۔ کسی سلسلہ کے استدقاق یا اتساع کی جانچ کرنے کے لئے جو قواعد دفعات ۲۶۷، ۲۹۱ میں قبل ازایں مذکور ہو چکے ہیں وہ بالعموم کافی ثابت ہوتے ہیں، تاہم دفعہ مابعد میں ہم ایک اور مسئلہ ثابت کرینگے جس کی مدد سے ہم معاون سلسلہ

$$\frac{۱}{۱^{\text{ق}}}+\frac{۱}{۲^{\text{ق}}}+\frac{۱}{۳^{\text{ق}}}+\cdots\cdots$$

کے ذریعہ کسی سلسلہ کو جانچنے کے چند اور قواعد مستنبط ہو سکیں گے جو اکثر اوقات مفید اور کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

۲۹۹۔ دو لا متناہی سلسلوں کی ن ویں رقمیں بالترتیب $\text{ع}_{\text{ن}}$ اور $\text{ف}_{\text{ن}}$ ہیں اور اِن سلسلوں کی سب رقمیں مثبت ہیں، تب اگر ف سلسلہ مستدق ہو تو ع سلسلہ بھی مستدق ہوگا جب کسی مقررہ رقم کے بعد $\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}-۱}} < \frac{\text{ف}_{\text{ن}}}{\text{ف}_{\text{ن}-۱}}$

اور اگر ف سلسلہ متسع ہو تو ع سلسلہ بھی متسع ہوگا جب کسی مقررہ رقم کے بعد

$$\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}-۱}} > \frac{\text{ف}_{\text{ن}}}{\text{ف}_{\text{ن}-۱}}$$

فرض کرو کہ مقررہ رقوم بالترتیب ع اور ف ہیں۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ $\frac{\text{ع}_۲}{\text{ع}_۱} < \frac{\text{ف}_۲}{\text{ف}_۱}$ ، $\frac{\text{ع}_۳}{\text{ع}_۲} < \frac{\text{ف}_۳}{\text{ف}_۲}$ ، ....

تب ع۱ + ع۲ + ع۳ + ...

= ع۱ (۱ + ع۲/ع۱ + ع۳/ع۲ × ع۲/ع۱ + ...)

< ع۱ (۱ + د۲/د۱ + د۳/د۲ × د۲/د۱ + ...)

یعنی < ع۱/د۱ (د۱ + د۲ + د۳ + ...)

اِس لئے اگر د سلسلہ مستدق ہو تو ع سلسلہ بھی مستدق ہوگا۔

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ع۲/ع۱ > د۲/د۱ ، ع۳/ع۲ > د۳/د۲ ......

تب ع۱ + ع۲ + ع۳ + ...

= ع۱ (۱ + ع۲/ع۱ + ع۳/ع۲ × ع۲/ع۱ + ...

> ع۱ (۱ + د۲/د۱ + د۳/د۲ × د۲/د۱ + ...)

یعنی > ع۱/د۱ (د۱ + د۲ + د۳ + ...)

پس اگر د سلسلہ متسع ہو تو ع سلسلہ بھی متسع ہوگا۔

۳۰۰۔ دفعہ ۲۸۷ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر اُس نسبت کی انتہا جو کسی سلسلہ کی ن ویں رقم اِس کی رقم ماقبل کے ساتھ رکھتی ہو ایک سے کم ہو تو سلسلہ مستدق ہوتا ہے اور اگر یہ نسبت ایک سے زیادہ ہو تو سلسلہ متسع ہوتا ہے۔

اِس باب کے باقی حصہ میں ہم دیکھینگے کہ اس جانچ کے مرادف صورت ذیل کو استعمال کرنا زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے

اگر کسی سلسلہ کی ن ویں رقم کی جو نسبت رقم مابعد کے ساتھ ہے اسکی انتہائی قیمت ایک سے بڑی ہو تو سلسلہ مستدق ہوگا اور اگر یہ نسبت ایک سے کم ہو تو سلسلہ متسع ہوگا۔

یعنی مستدق ہوگا اگر نہا $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} > 1$ اور متسع ہوگا اگر نہا $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} < 1$

اسی طرح سے دفعہ ماقبل کا مسئلہ بیان کیا جا سکتا ہے۔

ع سلسلہ مستدق ہوگا اگر و سلسلہ مستدق ہو بشرطیکہ نہا $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} >$ نہا $\frac{و_ن}{و_{ن+1}}$ اور ع سلسلہ متسع ہوگا اگر و سلسلہ متسع ہو بشرطیکہ نہا $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} <$ نہا $\frac{و_ن}{و_{ن+1}}$

۱۰۳ — وہ سلسلہ جس کی ن ویں رقم $ع_ن$ ہے مستدق ہوگا اگر نہا $\left\{ن\left(\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} - 1\right)\right\} > 1$ اور متسع ہوگا اگر نہا $\left\{ن\left(\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} - 1\right)\right\} < 1$

اس سلسلہ کا مقابلہ معاون سلسلہ سے کرو جسکی عام رقم $و_ن$، $\frac{1}{ن^{ق}}$ ہے جب $ق > 1$ تو معاون سلسلہ مستدق ہوگا، اس صورت میں دیا ہوا سلسلہ مستدق ہوگا اگر

$$\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} > \frac{(ن+1)^{ق}}{ن^{ق}} \text{ یا } \left(1 + \frac{1}{ن}\right)^{ق}$$

یعنی اگر $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} > 1 + \frac{ق}{ن} + \frac{ق(ق-1)}{2ن^2} + \cdots\cdots$

یا $ن\left(\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} - 1\right) > ق + \frac{ق(ق-1)}{2ن} + \cdots\cdots$

یعنی اگر $\text{نہا}\left\{\text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+1}}-1\right)\right\} > \text{ق}$

لیکن معاون سلسلہ مستدق ہوتا ہے اگر ق ایک سے بقدر ایک محدود مقدار کے جو خواہ کتنی ہی چھوٹی ہو بڑا ہو، پس مسئلہ ہذا کا پہلا حصہ ثابت ہوا۔
اگر $\text{ق} < 1$ تو معاون سلسلہ متسع ہوتا ہے اور حسب سابق ہم مسئلہ کا دوسرا حصہ بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

مثال ۔ معلوم کرو کہ سلسلہ

$$\frac{\text{لا}}{1}+\frac{1}{2}\times\frac{\text{لا}^3}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{\text{لا}^5}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{\text{لا}^7}{7}+\cdots$$

مستدق ہے یا متسع۔

یہاں $\text{نہا}\,\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+1}}=\frac{1}{\text{لا}^2}$، اس لئے اگر $\text{لا} < 1$ تو سلسلہ مستدق ہوگا اور اگر $\text{لا} > 1$ تو سلسلہ متسع ہوگا۔

اگر $\text{لا} = 1$ تو $\text{نہا}\,\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+1}}=1$، اس صورت میں

$$\text{ع}_{\text{ن}}=\frac{1\times3\times5\times\cdots\cdots(2\text{ن}-3)}{2\times4\times6\times\cdots\cdots(2\text{ن}-2)}\times\frac{1}{(2\text{ن}-1)}$$

اور $$\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+1}}=\frac{2\text{ن}(2\text{ن}+1)}{(2\text{ن}-1)(2\text{ن}-1)}$$

$$\therefore\ \text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+1}}-1\right)=\frac{\text{ن}(6\text{ن}-1)}{(2\text{ن}-1)^2}$$

$$\therefore\ \text{نہا}\left\{\text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+1}}-1\right)\right\}=\frac{3}{2}$$

پس اگر $\text{لا} = 1$ تو بھی سلسلہ بالا مستدق ہوگا۔

۳۰۲۔ ثابت کرو کہ وہ سلسلہ جس کی عام رقم $\text{ع}_{\text{ن}}$ ہے مستدق یا متسع ہوگا

اگر بالترتیب $\text{نہا}\left(\text{ن لوک}\ \frac{\text{ع}_\text{ن}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}}\right) > \text{یا} < ۱$

سلسلۂ زیر بحث کا مقابلہ اُس سلسلہ سے کرو جس کی عام رقم $\frac{۱}{\text{ن}^\text{ق}}$ ہے۔
جب $\text{ق} > ۱$، تو معاون سلسلہ مستدق ہوتا ہے اور اس صورت میں
سلسلہ زیر بحث مستدق ہوگا اگر

$$\frac{\text{ع}_\text{ن}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}} > \left(۱+\frac{۱}{\text{ن}}\right)^{\text{ق}} \quad ....[\text{دفعہ } ۳۰۰]$$

$$\text{یعنی اگر لوک}\ \frac{\text{ع}_\text{ن}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}} > \text{ق لوک}\ \left(۱+\frac{۱}{\text{ن}}\right)$$

$$\text{یا اگر لوک}\ \frac{\text{ع}_\text{ن}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}} > \frac{\text{ق}}{\text{ن}} - \frac{\text{ق}}{۲\text{ن}^۲} + ...$$

$$\text{یعنی اگر نہا}\left(\text{ن لوک}\ \frac{\text{ع}_\text{ن}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}}\right) > \text{ق}$$

پس مسئلہ زیر بحث کا پہلا حصہ ثابت ہوا۔
اگر $\text{ق} < ۱$ تو بھی ہم اسی طرح عمل کرتے ہیں، اس صورت میں معاون سلسلہ متسع ہوتا ہے۔

مثال۔ معلوم کرو کہ سلسلہ

$$\text{لا} + \frac{۲^۲\,\text{لا}^۲}{\lfloor ۲} + \frac{۳^۳\,\text{لا}^۳}{\lfloor ۳} + \frac{۴^۴\,\text{لا}^۴}{\lfloor ۴} + \frac{۵^۵\,\text{لا}^۵}{\lfloor ۵} + ...$$

مستدق ہے یا متسع۔

$$\text{یہاں}\ \frac{\text{ع}_\text{ن}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}} = \frac{\text{ن}^\text{ن}\,\text{لا}^\text{ن}}{\lfloor \text{ن}} \div \frac{(\text{ن}+۱)^{\text{ن}+۱}\,\text{لا}^{\text{ن}+۱}}{\lfloor \text{ن}+۱}$$

$$= \frac{\text{ن}^\text{ن}}{(\text{ن}+۱)^\text{ن}\,\text{لا}} = \frac{۱}{\left(۱+\frac{۱}{\text{ن}}\right)^\text{ن}\text{لا}}$$

$\therefore$ نہا $\dfrac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}} = \dfrac{۱}{\text{ولا}}$ ....[دفعہ ۲۲۰ نتیجہ صریح]

پس اگر لا $<$ $\dfrac{۱}{\text{و}}$ تو سلسلہ مستدق ہے اور اگر لا $>$ $\dfrac{۱}{\text{و}}$ تو سلسلہ متسع ہے۔

اگر لا = $\dfrac{۱}{\text{و}}$ تو $\dfrac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}} = \dfrac{\text{و}}{\left(۱+\dfrac{۱}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}}$

$$\therefore \text{لوک}\ \frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}} = \text{لوک و} - \text{ن لوک}\left(۱+\frac{۱}{\text{ن}}\right)$$

$$= ۱ - \text{ن}\left(\frac{۱}{\text{ن}} - \frac{۱}{۲\text{ن}^{۲}} + \frac{۱}{۳\text{ن}^{۳}} - \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{۱}{۲\text{ن}} - \frac{۱}{۳\text{ن}^{۲}} + \ldots\ldots$$

$$\therefore \text{ن لوک}\ \frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳\text{ن}} + \ldots\ldots$$

$$\therefore \text{نہا}\left(\text{ن لوک}\ \frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}}\right) = \frac{۱}{۲}$$

پس اگر لا = $\dfrac{۱}{\text{و}}$ تو سلسلہ متسع ہوگا۔

۳۰۲۔ اگر نہا $\dfrac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}} = ۱$ اور نیز نہا $\left\{\text{ن}\left(\dfrac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}} - ۱\right)\right\} = ۱$ تو آزمائش کے طریقے مندرجہ دفعات ۳۰۰ اور ۳۰۱ کارآمد نہیں ہوتے، پس کوئی نیا طریقہ دریافت کرنے کے لئے ہم اس معاون سلسلہ کا استعمال کرتے ہیں جس کی عام رقم $\dfrac{۱}{\text{ن}(\text{لوک ن})^{\text{ق}}}$ ہے، اس سلسلہ کا استدقاق یا اتساع

معلوم کرنے کے لئے ہمیں دفعہ ذیل کے مسئلہ کی ضرورت ہوگی ۔

۳۰۴ ۔ اگر ن کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے فہ (ن) مثبت رہے اور جوں جوں ن بڑھتا جائے اُس کی قیمت مسلسل کم ہوتی جائے، نیز اگر ا کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو ذیل کے دو لامتناہی سلسلے

فہ (۱) + فہ (۲) + فہ (۳) + ۔ ۔ ۔ ۔ + فہ (ن) + ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔

اور ا فہ (ا) + $ا^{۲}$ فہ ($ا^{۲}$) + $ا^{۳}$ فہ ($ا^{۳}$) + ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ $ا^{ن}$ فہ ($ا^{ن}$) + ۔ ۔ ۔ ۔

یا دونوں مستدق ہوں گے یا دونوں متسع ۔

پہلے سلسلہ میں رقوم

فہ ($ا^{ک}$ + ۱)، فہ ($ا^{ک}$ + ۲)، فہ ($ا^{ک}$ + ۳)، ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ فہ ($ا^{ک+۱}$) ۔ ۔ ۔ ۔ (۱)

پر غور کرو جو رقم فہ ($ا^{ک}$) کے بعد واقع ہوتی ہیں ۔

اِن رقوم کی تعداد $ا^{ک+۱}$ ۔ $ا^{ک}$ یعنی $ا^{ک}$ {ا ۔ ۱} ہے اور اِن میں سے ہر ایک رقم فہ ($ا^{ک+۱}$) سے بڑی ہے، پس اِن رقوم کا حاصل جمع $ا^{ک}$ (ا ۔ ۱) فہ ($ا^{ک+۱}$) سے بڑا ہے یعنی $\frac{ا - ۱}{ا}$ × $ا^{ک+۱}$ فہ ($ا^{ک+۱}$) سے بڑا ہے ۔

ک کو بالترتیب قیمتیں ۰، ۱، ۲، ۳، ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ دینے سے

فہ (۲) + فہ (۳) + فہ (۴) + ۔ ۔ ۔ ۔ فہ (ا) $>$ $\frac{ا - ۱}{ا}$ × ا فہ (ا)

فہ (ا + ۱) + فہ (ا + ۲) + فہ (ا + ۳) + ۔ ۔ ۔ + فہ ($ا^{۲}$) $>$ $\frac{ا - ۱}{ا}$ × $ا^{۲}$ فہ ($ا^{۲}$)

۔ ۔

جمع کرنے سے ج ۔ فہ (۱) $>$ $\frac{ا - ۱}{ا}$ جَ

جہاں ج اور ج بالترتیب پہلے اور دوسرے سلسلہ کے حاصل جمع کو تعبیر کرتے ہیں، پس اگر دوسرا سلسلہ متسع ہو تو پہلا بھی متسع ہو گا۔
نیز سلسلہ (۱) کی ہر ایک رقم فہ (اک) سے کم ہے اور اس لئے اس سلسلہ کا حاصل جمع (ا - ۱) اک فہ (اک) سے کم ہے۔
ک کو بالترتیب ۰، ۱، ۲، ۳، ... قیمتیں دینے سے

فہ (۲) + فہ (۳) + فہ (۴) + ... + فہ (ا) > (ا - ۱) × فہ (۱)

فہ (ا+۱) + فہ (ا+۲) + فہ (ا+۳) + ... + فہ (ا۲) > (ا - ۱) × ا فہ (ا)

....

اس لئے جمع کرنے سے

ج - فہ (۱) > (ا - ۱) { ج + فہ (۱) }

پس اگر دوسرا سلسلہ مستدق ہو تو پہلا بھی مستدق ہو گا۔
نوٹ۔ دوسرے سلسلہ کی عام رقم یعنی ن ویں رقم معلوم کرنے کے لئے ہم پہلے سلسلہ کی عام رقم یعنی فہ (ن) لیتے ہیں، پھر ن کی بجائے ان لکھ کر ان سے ضرب دے دیتے ہیں۔

۳۰۵۔ سلسلہ $1 + \frac{1}{2(\text{لوک } 2)^{ق}} + \frac{1}{3(\text{لوک } 3)^{ق}} + \dots + \frac{1}{ن(\text{لوک } ن)^{ق}} + \dots$
مستدق ہوتا ہے اگر ق > ۱ اور متسع ہوتا ہے اگر ق = یا < ۱
دفعہ ماقبل کی رو سے سلسلۂ بالا مستدق ہو گا یا متسع اگر وہ سلسلہ جس کی ن ویں رقم

$ا^{ن} \times \frac{1}{ا^{ن}(\text{لوک } ا^{ن})^{ق}}$ یعنی $\frac{1}{(ن \text{ لوک } ا)^{ق}}$ یعنی $\frac{1}{(\text{لوک } ا)^{ق}} \times \frac{1}{ن^{ق}}$

ہے ق کی اسی قیمت کے لئے بالترتیب مستدق یا متسع ہو۔
مستقل جزو ضربی $\frac{1}{(\text{لوک } ا)^{ق}}$ سب رقموں میں مشترک ہے پس سلسلۂ زیر بحث

اور وہ سلسلہ جسکی عام رقم $\frac{۱}{\text{ن}^{\text{ق}}}$ ہے ق کی ایک ہی قیمت کے لئے دونوں ستدق ہوں گے یا دونوں متسع، پس مطلوبہ نتیجہ دفعہ ۲۹۰ کی رُو سے بآسانی حاصل ہو جاتا ہے۔

۳۰۶ — وہ سلسلہ جس کی عام رقم $\text{ع}_{\text{ن}}$ ہے ستدق ہوگا یا متسع اگر بالترتیب

$$\text{نہا}\left[\left\{\text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}}-۱\right)-۱\right\}\text{لوک ن}\right] > \text{یا} < ۱$$

سلسلہ زیر بحث کا مقابلہ سلسلہ

$$۱+\frac{۱}{۲(\text{لوک }۲)^{\text{ق}}}+\frac{۱}{۳(\text{لوک }۳)^{\text{ق}}}+\cdots\cdots+\frac{۱}{\text{ن}(\text{لوک ن})^{\text{ق}}}+\cdots\cdots$$

سے کرو۔

جب ق $>$ ۱ تو معاون سلسلہ ستدق ہوتا ہے اور اس صورت میں سلسلہ زیر بحث دفعہ ۲۹۹ کی رُو سے ستدق ہوگا اگر

$$\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}} > \frac{(\text{ن}+۱)\{\text{لوک }(\text{ن}+۱)\}^{\text{ق}}}{\text{ن}(\text{لوک ن})^{\text{ق}}} \cdots\cdots (۱)$$

اب اگر ن بہت بڑا ہو تو

$$\text{لوک }(\text{ن}+۱)=\text{لوک ن}+\text{لوک }\left(۱+\frac{۱}{\text{ن}}\right)\doteq\text{لوک ن}+\frac{۱}{\text{ن}}\ \text{تقریباً}$$

پس شرط (۱) ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}} > \left(۱+\frac{۱}{\text{ن}}\right)\left(۱+\frac{۱}{\text{ن لوک ن}}\right)^{\text{ق}}$$

$$\text{یعنی}\quad \frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}} > \left(۱+\frac{۱}{\text{ن}}\right)\left(۱+\frac{\text{ق}}{\text{ن لوک ن}}\right)$$

$$\text{یعنی}\quad \frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}} > ۱+\frac{۱}{\text{ن}}+\frac{\text{ق}}{\text{ن لوک ن}}$$

یعنی $\text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+1}}-1\right) > 1+\frac{\text{ق}}{\text{لوک ن}}$

یعنی $\left\{\text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+1}}-1\right)-1\right\}\text{لوک ن} > \text{ق}$

لہذا مسئلہ ہذا کا پہلا حصہ ثابت ہوا، دوسرا حصہ بھی بموجب قاعدہ دفعہ ۳۰۱ بآسانی ثابت ہو سکتا ہے۔

مثال ۔ معلوم کرو کہ سلسلہ $1+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^2}{3^2}\times\frac{4^2}{5^2}+\frac{2^2}{3^2}\times\frac{4^2}{5^2}\times\frac{6^2}{7^2}+$ مستدق ہے یا متسع

یہاں $\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+1}}=\frac{(2\text{ن}+1)^2}{(2\text{ن})^2}=1+\frac{1}{\text{ن}}+\frac{1}{4\text{ن}^2}$ ......(۱)

∴ $\text{نہا}\ \frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+1}}=1$، اس لئے ہم مزید جانچ کرتے ہیں

(۱) سے $\text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+1}}-1\right)=1+\frac{1}{4\text{ن}}$ ....(۲)

∴ $\text{نہا}\left\{\text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+1}}-1\right)\right\}=1$، اس لئے ہم پھر مزید جانچ کی طرف رجوع کرتے ہیں۔

(۲) سے $\left\{\text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+1}}-1\right)-1\right\}\text{لوک ن}=\frac{\text{لوک ن}}{4\text{ن}}$

∴ $\text{نہا}\left[\left\{\text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+1}}-1\right)-1\right\}\text{لوک ن}\right]=0$

چونکہ دفعہ ۲۹۵ کی رو سے $\text{نہا}\ \frac{\text{لوک ن}}{\text{ن}}=0$، اس لئے ثابت ہوا کہ سلسلہ زیر بحث متسع ہے۔

۳۰۷۔ دفعہ ۲۸۳ میں ہم یہ تو بتا چکے ہیں کہ متسع سلسلوں کو سلکِ استدلال میں لانے سے بہت ممکن ہے کہ غلط نتائج مستنبط ہوں لیکن اگر لامتناہی سلسلے مستدق بھی ہوں تو بھی اُن کو استعمال کرنے میں احتیاط سے کام لینا ضروری ہوتا ہے۔ مثلاً سلسلہ

$$\text{۱} - \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\sqrt{\text{۲}}} - \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\sqrt{\text{۳}}} - \frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{\sqrt{\text{۴}}} + \frac{\text{لا}^{\text{۵}}}{\sqrt{\text{۵}}} + \cdots\cdots$$

مستدق ہوتا ہے جب $\text{لا} = \text{۱}$ [دیکھو دفعہ ۲۸۰]

اگر ہم اس سلسلہ کو اسی سلسلہ سے ضرب دیں تو حاصل ضرب میں $\text{لا}^{\text{۲ن}}$ کا سر

$$\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲ن}}} + \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲ن}-\text{۱}}} + \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}} \times \sqrt{\text{۲ن}-\text{۲}}} + \cdots\cdots + \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{ر}}\,\sqrt{\text{۲ن}-\text{ر}}} + \cdots\cdots + \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲ن}}}$$

ہے۔

اِس سر کو $\text{ا}_{\text{۲ن}}$ سے تعبیر کرو۔ تب چونکہ

$$\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{ر}}\,\sqrt{\text{۲ن}-\text{ر}}} > \frac{\text{۱}}{(\sqrt{\text{ن}})^{\text{۲}}} \text{ یعنی } > \frac{\text{۱}}{\text{ن}}$$

اس لئے $\text{ا}_{\text{۲ن}} > \frac{\text{۲ن}+\text{۱}}{\text{ن}}$ اور بنابریں لامتناہی ہے جب ن لامتناہی ہو

اگر $\text{لا} = \text{۱}$ تو حاصل ضرب

$$\text{ا}_{\text{۰}} - \text{ا}_{\text{۱}} + \text{ا}_{\text{۲}} - \text{ا}_{\text{۳}} + \cdots\cdots \text{ا}_{\text{۲ن}} - \text{ا}_{\text{۲ن}+\text{۱}} + \text{ا}_{\text{۲ن}+\text{۲}} \cdots\cdots$$

بن جاتا ہے اور چونکہ رقوم $\text{ا}_{\text{۲ن}}$، $\text{ا}_{\text{۲ن}+\text{۱}}$، $\text{ا}_{\text{۲ن}+\text{۲}}$، ...... لامتناہی ہیں، اس لئے اس سلسلہ کو کوئی حسابی معنی نہیں دئے جا سکتے۔

اِس سے یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ دو لامتناہی مستدق سلسلوں کا حاصل ضرب

کن شرائط کے ماتحت مستدق رہتا ہے۔

۳۰۸ - دو لامتناہی سلسلوں

$$ا_٠ + ا_١ لا + ا_٢ لا^٢ + ا_٣ لا^٣ + \ldots ا_{٢ن} لا^{٢ن} + \ldots$$

اور $ب_٠ + ب_١ لا + ب_٢ لا^٢ + ب_٣ لا^٣ + \ldots ب_{٢ن} لا^{٢ن} + \ldots$

کو بالترتیب ا اور ب سے تعبیر کرو۔

اگر ہم اِن دو سلسلوں کو باہم ضرب دیں تو حاصل ضرب حسب ذیل شکل کا ہوگا

$$ا_٠ب_٠ + (ا_١ب_٠ + ا_٠ب_١) لا + (ا_٢ب_٠ + ا_١ب_١ + ا_٠ب_٢) لا^٢ + \ldots$$

فرض کرو کہ یہ حاصل ضرب لامتناہی تک لکھا گیا ہے، اِس کو ج سے تعبیر کرو، اب ہمیں یہ دیکھنا ہے کہ کن شرائط کے ماتحت ہم ج کو ا ب کے حاصل ضرب کا حقیقی حسابی معادل خیال کر سکتے ہیں۔

پہلے فرض کرو کہ ا اور ب میں سب رقوم مثبت ہیں۔

ا، ب اور ج کی پہلی ۲ن رقوم سے جو سلسلے بنتے ہیں اُن کو بالترتیب $ا_{٢ن}$، $ب_{٢ن}$، $ج_{٢ن}$ سے تعبیر کرو۔

اگر ہم دو سلسلوں $ا_{٢ن}$ اور $ب_{٢ن}$ کو باہم ضرب دیں تو حاصل ضرب میں $لا^{٢ن}$ والی رقم تک لا کی ہر ایک قوت کا سر ج میں لا کی اُسی قوت والی رقم کے سر کے مساوی ہوگا، لیکن علاوہ ازیں حاصل ضرب $ا_{٢ن} ب_{٢ن}$ میں ایسی رقوم بھی شامل ہیں جن میں لا کی قوت ۲ن سے زیادہ ہے لیکن $ج_{٢ن}$ میں لا کی بڑی سے بڑی قوت $لا^{٢ن}$ ہے، اِس لئے

$$ا_{٢ن} ب_{٢ن} > ج_{٢ن}$$

اگر ہم حاصل ضرب $ا_ن ب_ن$ مرتب کریں تو اس میں آخری رقم $ا_ن ب_ن لا^{٢ن}$

ہوگی لیکن $ج_{2ن}$ میں وہ سب رقوم شامل ہیں جو اس حاصل ضرب میں موجود ہیں اور اس کے علاوہ کچھ اور رقمیں بھی ہیں، اس لئے

$$ج_{2ن} > ا_ن ب_ن$$

پس ن کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو $ج_{2ن}$ کی قیمت ہمیشہ $ا_ن ب_ن$ اور $ا_{2ن} ب_{2ن}$ کی قیمتوں کے درمیان ہوگی۔

فرض کرو کہ ا اور ب مستدق سلسلے ہیں،

$$ا_ن = ا - لا \quad \text{اور} \quad ب_ن = ب - ما$$

کے مساوی رکھو جہاں لا اور ما بالترتیب ان سلسلوں کے ان حصوں کو تعبیر کرتے ہیں جو (ن + ۱) رقمیں لے لینے کے بعد بچ رہتے ہیں، تب اگر ن لامتناہی ہوگا تو لا اور ما دونوں لا انتہا چھوٹے ہوں گے۔

$$\therefore ا_ن ب_ن = (ا - لا)(ب - ما) = اب - ب لا - ا ما + لا ما$$

اس لئے $ا_ن ب_ن$ کی انتہا اب ہے کیونکہ ا اور ب دونوں محدود ہیں، اسی طرح $ا_{2ن} ب_{2ن}$ کی انتہا اب ہے۔

اس لئے ج جو $ج_{2ن}$ کی انتہا ہے لازماً اب کے برابر ہوگا

کیونکہ یہ $ا_ن ب_ن$ اور $ا_{2ن} ب_{2ن}$ کی انتہاؤں کے درمیان واقع ہے۔

اب فرض کرو کہ ا اور ب کی سب رقوم کی علامتیں یکساں نہیں ہیں

اس صورت میں ضروری نہیں کہ لامساویات $ا_{2ن} ب_{2ن} > ج_{2ن} > ا_ن ب_ن$ درست ہوں اور ہم حسب سابق استدلال نہیں کر سکتے۔

دونوں سلسلوں کی مثبت رقوم کے مجموعہ کو بالترتیب ت، تَ سے اور

منفی رقوم کے مجموعہ کو بالترتیب ف، فَ سے تعبیر کرو یعنی

ا = ث - ف

ب = ثَ - فَ

تب اگر ث، ثَ، ف، فَ میں ہر ایک جملہ ایک مستدق سلسلہ ہو تو مساوات

اب = ث ثَ - ف ثَ - ث فَ + ف فَ

کے معنی بخوبی سمجھ میں آسکتے ہیں، کیونکہ ہر ایک جملہ ث ثَ، ف ثَ، ث فَ، ف فَ مسئلہ ہذا کے حصہ اول کی رو سے جداگانہ ایک مستدق سلسلہ ہے اور بنابریں سلاسل ا اور ب کا حاصل ضرب مستدق سلسلہ ہے۔ پس دو سلاسل کا حاصل ضرب مستدق ہوگا اگر ہر سلسلہ میں مثبت علامتوں والی رقوم کے حاصل جمع اور منفی علامتوں والی رقوم کے حاصل جمع جداگانہ مستدق سلسلے ہوں۔

لیکن اگر جملات ث، ف، ثَ، فَ میں سے ہر ایک جملہ متسع سلسلہ ہو (جیسا کہ دفعہ ماقبل کی صورت میں جہاں علاوہ ازیں ثَ = ث اور فَ = ف) تو سب جملات ث ثَ، ف ثَ، ث فَ، ف فَ متسع سلسلے ہونگے جب ایسی صورت ہو تو ہر ایک مثال میں جداگانہ یہ تحقیق کرلینا از بس ضروری ہوتا ہے کہ حاصل ضرب مستدق ہے یا نہیں۔

امثلہ نمبری ۱۲ (ب)

معلوم کرو کہ ذیل کے سلسلے مستدق ہیں یا متسع۔

۱- $۱ + \frac{۱}{۲} \times \frac{\text{لا}^{۲}}{۴} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۵}{۶} \times \frac{\text{لا}^{۴}}{۸} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۵}{۶} \times \frac{۷}{۸} \times \frac{۹}{۱۰} \times \frac{\text{لا}^{۶}}{۱۲} + \ldots$

۲- $۱ + \frac{۳}{۷}\,\text{لا} + \frac{۳}{۷} \times \frac{۶}{۱۰}\,\text{لا}^{۲} + \frac{۳}{۷} \times \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۹}{۱۳}\,\text{لا}^{۳} + \frac{۳}{۷} \times \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۹}{۱۳} \times \frac{۱۲}{۱۶}\,\text{لا}^{۴} + \ldots\ldots$

۳- $\text{لا}^{۲} + \frac{۲^{۲}}{۳ \times ۴}\,\text{لا}^{۴} + \frac{۲^{۲} \times ۴^{۲}}{۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶}\,\text{لا}^{۶} + \frac{۲^{۲} \times ۴^{۲} \times ۶^{۲}}{۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸}\,\text{لا}^{۸} + \ldots\ldots\ldots$

۴۔ $۱ + \frac{۲\,\text{لا}}{\lfloor ۲} + \frac{۳^{۲}\,\text{لا}^{۲}}{\lfloor ۳} + \frac{۴^{۳}\,\text{لا}^{۳}}{\lfloor ۴} + \frac{۵^{۴}\,\text{لا}^{۴}}{\lfloor ۵} + \cdots\cdots$

۵۔ $۱ + \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{\lfloor ۲}{۳^{۲}}\text{لا}^{۲} + \frac{\lfloor ۳}{۴^{۳}}\text{لا}^{۳} + \frac{\lfloor ۴}{۵^{۴}}\text{لا}^{۴} + \cdots\cdots$

۶۔ $\frac{۱^{۲}}{۲^{۲}} + \frac{۱^{۲}}{۲^{۲}} \times \frac{۳^{۲}}{۴^{۲}}\,\text{لا} + \frac{۱^{۲}}{۲^{۲}} \times \frac{۳^{۲}}{۴^{۲}} \times \frac{۵^{۲}}{۶^{۲}}\,\text{لا}^{۲} + \cdots\cdots$

۷۔ $۱ + \frac{\text{د}(۱-\text{د})}{۱^{۲}} + \frac{(۱+\text{د})\,\text{د}\,(۱-\text{د})(۲-\text{د})}{۱^{۲} \times ۲^{۲}} + \frac{(۲+\text{د})(۱+\text{د})\,\text{د}\,(۱-\text{د})(۲-\text{د})(۳-\text{د})}{۱^{۲} \times ۲^{۲} \times ۳^{۲}} + \cdots\cdots$

جہاں د کوئی کسر واجب ہے۔

۸۔ $\frac{\text{د} + \text{لا}}{۱} + \frac{(\text{د} + ۲\,\text{لا})^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{(\text{د} + ۳\,\text{لا})^{۳}}{\lfloor ۳} + \cdots\cdots$

۹۔ $۱ + \frac{\text{ع}\,\text{ب}}{۱ \times \text{ج}}\,\text{لا} + \frac{\text{ع}(\text{ع}+۱)\,\text{ب}(\text{ب}+۱)}{۱ \times ۲\,\text{ج}(\text{ج}+۱)}\,\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ع}(\text{ع}+۱)(\text{ع}+۲)\,\text{ب}(\text{ب}+۱)(\text{ب}+۲)}{۱ \times ۲ \times ۳\,\text{ج}(\text{ج}+۱)(\text{ج}+۲)} +$

۱۰۔ $\text{لا}^{۲}(\text{لوک}\ ۲)^{\text{ق}} + \text{لا}^{۳}(\text{لوک}\ ۳)^{\text{ق}} + \text{لا}^{۴}(\text{لوک}\ ۴)^{\text{ق}} + \cdots\cdots$

۱۱۔ $۱ + \text{د} + \frac{\text{د}(\text{د}+۱)}{۱ \times ۲} + \frac{\text{د}(\text{د}+۱)(\text{د}+۲)}{۱ \times ۲ \times ۳} + \cdots\cdots$

۱۲۔ اگر $\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}} = \frac{\text{ن}^{\text{ک}} + \text{ا}\,\text{ن}^{\text{ک}-۱} + \text{ب}\,\text{ن}^{\text{ک}-۲} + \text{ج}\,\text{ن}^{\text{ک}-۳} + \cdots\cdots}{\text{ن}^{\text{ک}} + \text{ا}_{۱}\,\text{ن}^{\text{ک}-۱} + \text{ب}_{۱}\,\text{ن}^{\text{ک}-۲} + \text{ج}_{۱}\,\text{ن}^{\text{ک}-۳} + \cdots\cdots}$ جہاں

ک کوئی مثبت صحیح عدد ہے، تو ثابت کرو کہ سلسلہ $ع_{۱} + ع_{۲} + ع_{۳} + \cdots$ مستدق ہوگا اگر $ا - ا_{۱} - ۱$ مثبت ہو اور متسع ہوگا اگر $ا - ا_{۱} - ۱$ منفی ہو یا صفر کے مساوی ہو۔



بائیسواں باب

نامعلوم سر

ایلی منٹری الجبرا کی دفعہ ۲۳۰ میں یہ ثابت کیا جاچکا ہے کہ اگر لا کے کسی منطق صحیح تفاعل میں لا = ہ رکھنے سے تفاعل مذکور صفر ہو جائے تو یہ تفاعل لا - ہ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔ [علاوہ ازیں دیکھو دفعہ ۱۵۴ نتیجہ صریح]

فرض کرو کہ

$$ق\,لا^{ن} + ق_{۱}\,لا^{ن-۱} + ق_{۲}\,لا^{ن-۲} + \ldots\ldots + ق_{ن}$$

لا میں ن ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے جو معدوم ہو جاتا ہے جبکہ لا ذیل کی غیر مساوی مقادیر میں سے کسی ایک کے مساوی ہو۔

$$ا_{۱}،\ ا_{۲}،\ ا_{۳}،\ \ldots\ldots\ ا_{ن}$$

مذکورۂ بالا تفاعل کو ف (لا) سے تعبیر کرو، تب چونکہ ف (لا)، لا - $ا_{۱}$ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے اس لئے

$$ف(لا) = (لا - ا_{۱})\left\{ق\,لا^{ن-۱} + \ldots\ldots\ldots\right\}$$

جہاں خارج قسمت، (ن - ۱) ابعاد کا ایک جملہ ہے۔

اسی طرح سے چونکہ ف (لا)، لا - $ا_{۲}$ پر بھی پورا تقسیم ہو جاتا ہے، اس لئے

$$ق\,لا^{ن-۱} + \ldots\ldots = (لا - ا_{۲})(ق\,لا^{ن-۲} + \ldots\ldots)$$

جہاں خارج قسمت (ن - ۲) ابعاد کا ایک جملہ ہے، اور

$$ق_۰ لا^{ن-۲} + \dots\dots = (لا - ا_۲)(ق_۰ لا^{ن-۳} + \dots\dots)$$

....

اسی طرح ن بار تقسیم کا عمل کرنے سے بالآخر حاصل ہوتا ہے:

$$ف(لا) = ق_۰ (لا - ا_۱)(لا - ا_۲)(لا - ا_۳) \dots\dots (لا - ا_ن)$$

۱۰۱۳ — اگر ن ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل متغیر کی ن سے زیادہ قیمتوں کے لئے معدوم ہو جائے تو متغیر کی ہر قوت کا سر لازماً صفر ہوگا۔
تفاعل کو ف (لا) سے تعبیر کرو، جہاں

$$ف(لا) = ق_۰ لا^ن + ق_۱ لا^{ن-۱} + ق_۲ لا^{ن-۲} + \dots\dots + ق_ن$$

نیز فرض کرو کہ ف (لا) صفر ہو جاتا ہے جب لا ذیل کی غیر مساوی قیمتوں $ا_۱$، $ا_۲$، $ا_۳$، ...... $ا_ن$ میں سے کوئی قیمت اختیار کرے۔ تب

$$ف(لا) = ق_۰ (لا - ا_۱)(لا - ا_۲)(لا - ا_۳) \dots\dots (لا - ا_ن)$$

نیز فرض کرو کہ لا کی ایک اور قیمت جس سے ف (لا) معدوم ہو جاتا ہے ا ہے، تب چونکہ ف (ا) = ۰

اسلئے $ق_۰ (ا - ا_۱)(ا - ا_۲)(ا - ا_۳) \dots\dots (ا - ا_ن) = ۰$

اس لئے $ق_۰ = ۰$ کیونکہ حسب مفروض باقی اجزائے ضربی میں سے کوئی جزوِ ضربی صفر نہیں ہے، پس ف (لا) ہو جاتا ہے

$$ق_۱ لا^{ن-۱} + ق_۲ لا^{ن-۲} + ق_۳ لا^{ن-۳} + \dots\dots + ق_ن$$

یہ جملہ حسب مفروض لا کی ن سے زیادہ قیمتوں کے لئے صفر ہو جاتا ہے
اس لئے $\text{ق}_1 = 0$

اسی طرح علیٰ ہذا القیاس ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ سروں ق_2، ق_3، ...... $\text{ق}_{\text{ن}}$ میں سے ہر ایک سر صفر کے مساوی ہے
اس نتیجہ کو بالفاظِ ذیل یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے۔
اگر ن ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل متغیر کی ن سے زیادہ قیمتوں کے لئے معدوم ہو جائے تو یہ تفاعل متغیر کی ہر قیمت کے لئے معدوم ہو جائے گا۔

نتیجہ صریح۔ اگر تفاعل ف (لا)، لا کی ن سے زیادہ قیمتوں کے لئے صفر ہو جائے تو مساوات ف (لا) = ۰ کی ن سے زیادہ اصلیں ہوں گی۔

بنابریں اگر ن ابعاد کی کسی مساوات کی ن سے زیادہ اصلیں ہوں تو یہ مساوات متماثلہ ہو گی۔

مثال۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج})}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ج})}+\frac{(\text{لا}-\text{ج})(\text{لا}-\text{ا})}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ب}-\text{ا})}+\frac{(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})}{(\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}-\text{ب})}=1$$

یہ دو ابعاد کی مساوات ہے جو صریحاً تین قیمتوں ا، ب، ج میں سے ہر ایک سے پوری ہوتی ہے اس لئے یہ مساواتِ متماثلہ ہے۔

۱۱۳۔ اگر ن ابعاد کے دو منطق صحیح تفاعل، متغیر کی ن سے زیادہ قیمتوں کے لئے باہم مساوی ہوں تو وہ تفاعل متغیر کی ہر قیمت کے لئے مساوی ہوں گے۔

فرض کرو کہ دو تفاعل ہیں

$$\text{ق}_0\,\text{لا}^{\text{ن}}+\text{ق}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1}+\text{ق}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2}+\ldots\ldots+\text{ق}_{\text{ن}}$$

اور $\text{قَ}_{\text{ب}}\text{لا}^{\text{ن}} + \text{قَ}_{1}\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{قَ}_{2}\text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots\dots + \text{قَ}_{\text{ن}}$

اور یہ لا کو ن سے زیادہ قیمتوں کے لئے باہم مساوی ہو جاتے ہیں، تب جملہ

$$(\text{ق}_{\text{ب}} - \text{قَ}_{\text{ب}})\text{لا}^{\text{ن}} + (\text{ق}_{1} - \text{قَ}_{1})\text{لا}^{\text{ن}-1} + (\text{ق}_{2} - \text{قَ}_{2})\text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots\dots\dots + (\text{ق}_{\text{ن}} - \text{قَ}_{\text{ن}})$$

لا کی ن سے زیادہ قیمتوں سے صفر ہو جاتا ہے اور اس لئے دفعۂ ماقبل کی رو سے $\text{ق}_{\text{ب}} - \text{قَ}_{\text{ب}} = 0$، $\text{ق}_{1} - \text{قَ}_{1} = 0$، $\text{ق}_{2} - \text{قَ}_{2} = 0$

$$\text{ق}_{\text{ن}} - \text{قَ}_{\text{ن}} = 0$$

پس دونوں جملے متطابق (ایک ہی) ہیں اور اس لئے متغیر کی ہر قیمت کے لئے باہم مساوی ہیں۔

لہذا اگر دو منطق، صحیح تفاعل متماثل طور پر ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو ہم متغیر کی یکساں قوتوں کے سروں کو باہم مساوی رکھ سکتے ہیں۔

اس اصول کو ہم نے ایلی منٹری الجبرا دفعہ ۲۲۷ میں بلا ثبوت تسلیم کرلیا تھا۔

نتیجہ صریح۔ اگر ایک تفاعل بمقابلہ دوسرے تفاعل کے کم ابعاد کا ہو تو بھی یہ مسئلہ درست رہتا ہے۔ مثلاً اگر

$$\text{ق}_{\text{ب}}\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ق}_{1}\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ق}_{2}\text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots + \text{ق}_{\text{ن}}$$

$$= \text{قَ}_{2}\text{لا}^{\text{ن}-2} + \text{قَ}_{3}\text{لا}^{\text{ن}-3} + \dots + \text{قَ}_{\text{ن}}$$

تو اس صورت میں ہمیں صرف یہ فرض کرلینا چاہئے کہ $\text{قَ}_{\text{ب}}$ اور قَ_{1} دونوں

صفر ہیں،
تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ق'_{۰} = ۰ ، ق_{۱} = ۰ ، ق_{۲} = ق'_{۲} ، ق_{۳} = ق'_{۳} ، ..... ق_{ن} = ق'_{ن}$$

۱۳۲۔ دفعہ ماقبل کے نظریہ کو بالعموم "نامعلوم سروں کے اصول" سے موسوم کرتے ہیں۔ اس اصول کا استعمال ذیل کی مثالوں سے واضح ہو جائیگا۔

مثال ۱۔ سلسلہ $۱\times۲ + ۲\times۳ + ۳\times۴ + ... + ن(ن+۱)$ کا حاصل جمع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ

$$۱\times۲ + ۲\times۳ + ۳\times۴ + ... + ن(ن+۱)$$
$$= ا + ب ن + ج ن^{۲} + د ن^{۳} + ع ن^{۴} + ...$$

جہاں ا، ب، ج، د، ع ...... ایسی مقادیر ہیں جو ن کے تابع نہیں اور ان کی قیمتیں معلوم کرنا مقصود ہے۔

ن کو ن + ۱ میں بدل دو۔ تب

$$۱\times۲ + ۲\times۳ + ۳\times۴ + ... + ن(ن+۱) + (ن+۱)(ن+۲)$$
$$= ا + ب(ن+۱) + ج(ن+۱)^{۲} + د(ن+۱)^{۳} + ع(ن+۱)^{۴} + ...$$

تفریق کرنے سے

$$(ن+۱)(ن+۲) = ب + ج(۲ن+۱) + د(۳ن^{۲} + ۳ن + ۱)$$
$$+ ع(۴ن^{۳} + ۶ن^{۲} + ۴ن + ۱) + ...$$

چونکہ یہ مساوات ن کی سب صحیح قیمتوں کے لئے درست ہے، اسلئے طرفین مساوات میں ن کی یکساں قوتوں کے سر باہم مساوی ہیں،

پس ء اور ء کے بعد کے تمام سر صفر ہیں، نیز

۳د = ۱، ۳د + ۲ج = ۳، د + ج + ب = ۲

جن سے د = ۱/۳، ج = ۱، ب = ۲/۳

پس حاصل جمع مطلوبہ = ا + ۲ن/۳ + ن^{2} + (۱/۳) ن^{3}

ا کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ن = ۱ رکھو

تب سلسلہ میں صرف ایک ہی یعنے پہلی رقم رہ جاتی ہے، اس طرح

۲ = ا + ۲ یعنی ا = ۰

لہذا ۱×۲ + ۲×۳ + ۳×۴ + ... + ن(ن+۱)

= (۱/۳) ن(ن+۱)(ن+۲)

نوٹ۔ اس جواب کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر کسی سلسلہ میں ن ویں رقم ن کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہو تو ہم سلسلۂ مذکور کے حاصل جمع کو ن کے ایک ایسے تفاعل کے مساوی فرض کرسکتے ہیں جسکا بُعد سلسلہ کی ن ویں رقم کے بُعد سے بقدر ایک کے زیادہ ہو۔

مثال ۲۔ معلوم کرو کہ کیا شرائط پوری ہونی چاہئیں کہ

لا^{3} + ق لا^{2} + ل لا + ر، لا^{2} + ا لا + ب پر پورا تقسیم ہو جائے۔

فرض کرو کہ لا^{3} + ق لا^{2} + ل لا + ر = (لا + ک)(لا^{2} + ا لا + ب)

لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو باہم مساوی رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

ک + ا = ق، اک + ب = ل، ک ب = ر

آخری مساوات سے ک = ر/ب، اس قیمت کو درج کرنے سے

ر/ب + ا = ق اور ار/ب + ب = ل

یعنی ر = ب (ق - ا) اور ار = (ل - ب) جو شرائط مطلوبہ ہیں۔

امثلہ نمبری ۲۲ (ا)

نامعلوم سروں کے قاعدہ سے ذیل کے سلسلوں کے حاصل جمع معلوم کرو۔

۱- ۱^{۲} + ۳^{۲} + ۵^{۲} + ۷^{۲} + ... ن رقموں تک

۲- ۱ × ۲ × ۳ + ۲ × ۳ × ۴ + ۳ × ۴ × ۵ + ... ن رقموں تک

۳- ۱ × ۲^{۲} + ۲ × ۳^{۲} + ۳ × ۴^{۲} + ۴ × ۵^{۲} + ... ن رقموں تک

۴- ۱^{۳} + ۳^{۳} + ۵^{۳} + ۷^{۳} + ... ن رقموں تک

۵- ۱^{۴} + ۲^{۴} + ۳^{۴} + ۴^{۴} + ... ن رقموں تک

۶- کیا شرط پوری ہونی چاہیئے کہ لا^{۳} - ۳ ق لا + ۲ ل، جملہ لا^{۲} + ۲ ا لا + ا^{۲} کی شکل کے ایک جزو ضربی پر پورا تقسیم ہو جائے۔

۷- وہ شرائط معلوم کرو کہ جملہ ا لا^{۳} + ب لا^{۲} + ج لا + ھ پورا مکعب ہو۔

۸- کیا شرائط پوری ہوں کہ ا^{۲} لا^{۴} + ب لا^{۳} + ج لا^{۲} + د لا + ف^{۲} پورا مربع ہو۔

۹- ثابت کرو کہ ا لا^{۲} + ۲ ب لا ما + ج ما^{۲} + ۲ د لا + ۲ ع ما + ف پورا مربع ہوگا اگر ب^{۲} = ا ج، د^{۲} = ا ف اور ع^{۲} = ج ف

۱۰- اگر ا لا^{۳} + ب لا^{۲} + ج لا + د جملہ لا^{۲} + ھ^{۲} پر پورا تقسیم ہو سکے تو ثابت کرو کہ ا د = ب ج

۱۱- اگر لا^{۵} - ۵ ل لا + ۴ ر جملہ (لا - ج)^{۲} پر پورا تقسیم ہو جائے تو ثابت کرو کہ ل^{۵} = ر^{۴}

۱۲- ثابت کرو کہ ذیل کی مساواتیں متماثل ہیں

(۱) $$\frac{ا^2(لا-ب)(لا-ج)}{(ا-ب)(ا-ج)} + \frac{ب^2(لا-ج)(لا-ا)}{(ب-ج)(ب-ا)} + \frac{ج^2(لا-ا)(لا-ب)}{(ج-ا)(ج-ب)} = لا^2$$

(۲) $$\frac{(لا-ب)(لا-ج)(لا-د)}{(ا-ب)(ا-ج)(ا-د)} + \frac{(لا-ج)(لا-د)(لا-ا)}{(ب-ج)(ب-د)(ب-ا)} + \frac{(لا-د)(لا-ا)(لا-ب)}{(ج-د)(ج-ا)(ج-ب)}$$

$$+ \frac{(لا-ا)(لا-ب)(لا-ج)}{(د-ا)(د-ب)(د-ج)} = ۱$$

۱۳- وہ شرط معلوم کرو کہ جملہ

$$ا\,لا^2 + ۲ھ\,لا\,ما + ب\,ما^2 + ۲گ\,لا + ۲ف\,ما + ج$$

جملات $ق\,لا + ل\,ما + ر$ اور $قَ\,لا + لَ\,ما + رَ$ کی شکل کے دو اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہو۔

۱۴- اگر $لا = ل\,لا + م\,ما + ن\,ی$، $ما = ن\,لا + ل\,ما + م\,ی$، $ی = م\,لا + ن\,ما + ل\,ی$ اور نیز اگر لا، ما، ی کی سب قیمتوں کے لئے یہ مساواتیں درست ہوں جبکہ لا، ما، ی اور لا، ما، ی کا بالترتیب باہم تبادلہ کردیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$ل^2 + ۲م\,ن = ۱،\quad م^2 + ۲ل\,ن = ۰،\quad ن^2 + ۲ل\,م = ۰$$

۱۵- اگر ن مقادیر $ا_1، ا_2، ا_3، \ldots\ldots ا_ن$ میں سے ن - ر مقادیر لینے سے مختلف اجتماع بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ جن اجتماعوں پر یہ حاصل ضرب مشتمل ہیں ان کا مجموعہ

$$ا^{\frac{1}{2}(ن-ر)(ن-ر+1)} \frac{(ا^{ر+1}-1)(ا^{ر+2}-1)\ldots\ldots(ا^{ن}-1)}{(ا-1)(ا^{2}-1)\ldots\ldots(ا^{ن-ر}-1)}$$

ہے۔

۱۳ا۳۔ اگر لامتناہی سلسلہ $ا_0 + ا_1 لا + ا_2 لا^2 + ا_3 لا^3 + \ldots$، لا کی ہر ایسی محدود قیمت کے لئے جس سے کہ سلسلۂ بالا مستدق رہے صفر ہو، تو اس کا ہر ایک سر متماثل طور پر صفر ہو گا۔

سلسلہ بالا کو ج سے اور سلسلہ $ا_1 + ا_2 لا + ا_3 لا^2 + \ldots$ کو ج، سے تعبیر کرو، تب ج = $ا_0$ + ج، لا، اب حسب مفروض لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے $ا_0$ + لا ج، =۰ لیکن چونکہ ج، مستدق ہے اس لئے ج، کسی محدود انتہا سے تجاوز نہیں کرسکتا اس لئے لا کو کافی چھوٹا لینے سے ہم لا ج، کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا کہ چاہیں۔ جس سے بصورت موجودہ ج کی انتہا $ا_0$ ہو جاتی ہے۔
لیکن ج ہمیشہ صفر رہتا ہے اس لئے $ا_0$ متماثل طور پر صفر کے مساوی ہے۔
رقم $ا_0$ کو نکال دینے سے لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے لا ج، =۰

یعنی لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے $ا_1 + ا_2 لا + ا_3 لا^2 + \ldots$ صفر ہو جاتا ہے۔
اسی طرح سے سلسلہ وار ہم یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ سر $ا_1$، $ا_2$، $ا_3$... وغیرہ سب متماثل طور پر صفر کے مساوی ہیں۔

۱۴ا۳۔ اگر دو لامتناہی سلسلے متغیر کی ہر ایسی محدود قیمت کیلئے جس سے یہ سلسلے مستدق رہیں ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو ان سلسلوں میں متغیر کی یکساں قوتوں کے سر باہم مساوی ہونگے۔

فرض کرو کہ دو سلسلے

$$\text{ا}_{0} + \text{ا}_{1}\,\text{لا} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{2} + \text{ا}_{3}\,\text{لا}^{3} + \dots\dots$$

اور

$$\text{ا}'_{0} + \text{ا}'_{1}\,\text{لا} + \text{ا}'_{2}\,\text{لا}^{2} + \text{ا}'_{3}\,\text{لا}^{3} + \dots\dots$$

ہیں۔ تب جملہ

$$(\text{ا}_{0} - \text{ا}'_{0}) + (\text{ا}_{1} - \text{ا}'_{1})\,\text{لا} + (\text{ا}_{2} - \text{ا}'_{2})\,\text{لا}^{2} + (\text{ا}_{3} - \text{ا}'_{3})\,\text{لا}^{3} + \dots\dots$$

مقررہ انتہاؤں کے اندر لا کی تمام قیمتوں کے لئے معدوم ہو جائیگا۔ پس دفعۂ ماقبل کی رُو سے

$$\text{ا}_{0} - \text{ا}'_{0} = 0،\ \text{ا}_{1} - \text{ا}'_{1} = 0،\ \text{ا}_{2} - \text{ا}'_{2} = 0،\ \text{ا}_{3} - \text{ا}'_{3} = 0، \dots\dots\dots$$

یعنی $\text{ا}_{0} = \text{ا}'_{0}،\ \text{ا}_{1} = \text{ا}'_{1}،\ \text{ا}_{2} = \text{ا}'_{2}،\ \text{ا}_{3} = \text{ا}'_{3}، \dots\dots\dots$

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

مثال ۱۔ $\dfrac{2 + \text{لا}^{2}}{1 + \text{لا} - \text{لا}^{2}}$ کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں اس رقم تک پھیلاؤ جس میں لا^{5} واقع ہو۔

فرض کرو کہ $\dfrac{2 + \text{لا}^{2}}{1 + \text{لا} - \text{لا}^{2}} = \text{ا}_{0} + \text{ا}_{1}\,\text{لا} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{2} + \text{ا}_{3}\,\text{لا}^{3} \dots\dots$

جہاں $\text{ا}_{0}،\ \text{ا}_{1}،\ \text{ا}_{2}،\ \text{ا}_{3}$...... مستقل مقداریں ہیں جنکی قیمتیں نکالنا مطلوب ہے ؛

$$2 + \text{لا}^{2} = (1 + \text{لا} - \text{لا}^{2})(\text{ا}_{0} + \text{ا}_{1}\,\text{لا} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{2} + \text{ا}_{3}\,\text{لا}^{3} + \dots\dots)$$

طرفین مساوات میں ہم لا کی یکساں قوتوں والی رقوم کے سروں کو مساوی رکھ سکتے ہیں۔ بائیں جانب میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $\text{ا}_{\text{ن}} + \text{ا}_{\text{ن}-1} - \text{ا}_{\text{ن}-2}$ ہے اور چونکہ دائیں جانب لا کی بڑی سے بڑی قوت ۲ ہے،

اس لئے ن کی ان تمام قوتوں کے لئے جو دو سے بڑی ہیں

$$ا_{ن} + ا_{ن-۱} - ا_{ن-۲} = ۰$$

اگر پہلے تین سر معلوم ہو جائیں تو اس کے بعد مساوات بالا کی مدد سے ہم متواتر سروں کی قیمتیں نکال سکتے ہیں، ان تین سروں کو دریافت کرانے کے لئے ذیل کی مساواتیں بنتی ہیں

$$ا_{۰} = ۲\text{،}\quad ا_{۱} + ا_{۰} = ۰\text{،}\quad ا_{۲} + ا_{۱} - ا_{۰} = ۱$$

جن سے $ا_{۰} = ۲$، $ا_{۱} = -۲$، $ا_{۲} = ۵$

نیز $ا_{۳} + ا_{۲} - ا_{۱} = ۰$ جس سے $ا_{۳} = -۷$

$ا_{۴} + ا_{۳} - ا_{۲} = ۰$ جس سے $ا_{۴} = ۱۲$

$ا_{۵} + ا_{۴} - ا_{۳} = ۰$ جس سے $ا_{۵} = -۱۹$

پس $\frac{۲ + لا^{۲}}{۱ + لا - لا^{۲}} = ۲ - ۲لا + ۵لا^{۲} - ۷لا^{۳} + ۱۲لا^{۴} - ۱۹لا^{۵} + \dots$

مثال ۲ — ثابت کرو کہ اگر ن اور ر مثبت صحیح اعداد ہوں تو

$$ن^{ر} - ن(ن-۱)^{ر} + \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲}(ن-۲)^{ر} - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۳}(ن-۳)^{ر} + \dots$$

صفر کے مساوی ہوگا اگر ر چھوٹا ہو ن سے اور $\lfloor ن$ کے مساوی ہوگا اگر ر = ن

ظاہر ہے کہ $(و^{لا} - ۱)^{ن} = \left(لا + \frac{لا^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{لا^{۳}}{\lfloor ۳} + \frac{لا^{۴}}{\lfloor ۴} + \dots\right)^{ن}$

$= لا^{ن} +$ لا کی بڑی قوتوں والی رقوم .... (۱)

نیز مسئلہ ثنائی سے

$$(و^{لا} - ۱)^{ن} = و^{ن لا} - ن\, و^{(ن-۱)لا} + \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲}\, و^{(ن-۲)لا} - \dots\dots \quad (۲)$$

$و^{ن لا}$، $و^{(ن-۱)لا}$ ......، وغیرہ وغیرہ سب رقوم کو پھیلا کر ہم دیکھتے ہیں کہ (۲) میں $لا^{ر}$ کا سر

$$\frac{ن^{ر}}{\lfloor ر} - ن \frac{(ن-۱)^{ر}}{\lfloor ر} + \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲} \times \frac{(ن-۲)^{ر}}{\lfloor ر}$$

$$\left(- \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۳}\right) \times \frac{(ن-۳)^{ر}}{\lfloor ر} + \dots\dots\dots$$ ہے

(۱) اور (۲) میں $لا^{ر}$ کے سروں کو مساوی کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۳ - اگر $ما = ا\,لا + ب\,لا^{۲} + ج\,لا^{۳} + \dots\dots$ تو لا کی قیمت ما کی صعودی قوتوں میں $ما^{۳}$ والی رقم تک معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $لا = ق\,ما + ل\,ما^{۲} + ر\,ما^{۳} + \dots\dots\dots$

لا کی یہ قیمت دئے ہوئے سلسلہ میں مندرج کرنے سے

$$ما = ا(ق\,ما + ل\,ما^{۲} + ر\,ما^{۳} + \dots) + ب(ق\,ما + ل\,ما^{۲} + ر\,ما^{۳} + \dots)^{۲}$$
$$+ ج(ق\,ما + ل\,ما^{۲} + ر\,ما^{۳} + \dots)^{۳} + \dots\dots$$

ما کی یکساں قوتوں والی رقوم کے سروں کو مساوی کرنے سے

$ا\,ق = ۱$　جس سے $ق = \frac{۱}{ا}$

$ا ل + ب ق^2 = ۰$ ۔ جس سے $ل = -\frac{ب}{ا^3}$

$ا ر + ۲ ب ق ل + ج ق^3 = ۰$ ۔ جس سے $ر = \frac{۲ ب^2}{ا^5} - \frac{ج}{ا^4}$

$$پس\ لا = \frac{ما}{ا} - \frac{ب\ ما^2}{ا^3} + \frac{(۲ب^2 - اج)\ ما^3}{ا^5} + \ldots\ldots$$

سلسلوں کی تقلیب کی ایک مثال ہے۔

نتیجہ صریح۔ ما کے لئے جو سلسلہ اوپر دیا گیا ہے اگر اس کی شکل حسب ذیل ہو

$$ما = ک + ا لا + ب لا^2 + ج لا^3 + \ldots$$

تو رکھو $ما - ک = ی$

تب $ی = ا لا + ب لا^2 + ج لا^3 + \ldots\ldots$ جس سے لا کو ی کی یعنی (ما - ک) کی صعودی قوتوں میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

امثلہ نمبری ۲۲ (ب)

ذیل کے جملات کو لا کی صعودی قوتوں میں $لا^3$ والی رقم تک پھیلاؤ

۱- $\frac{۱ + ۲ لا}{۱ - لا - لا^2}$　　(۲) $\frac{۱ - ۸ لا}{۱ - لا - ۶ لا^2}$

۳- $\frac{۱ + لا}{۲ + لا + لا^2}$　　(۴) $\frac{۳ + لا}{۲ - لا - لا^2}$　　(۵) $\frac{۱}{۱ + ا لا - ا لا^2 - لا^3}$

۶- اگر $\frac{ا + ب لا}{(۱ - لا)^2}$ کی تفصیل میں ن ویں رقم $(۳ن - ۲) لا^{ن-۱}$ ہو تو ا اور ب کی قیمتیں معلوم کرو۔

۷۔ اگر $\frac{\text{ا} + \text{ب لا} + \text{ج لا}^{۲}}{(۱ - \text{لا})^{۳}}$ کی تفصیل میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $\text{ن}^{۲} + ۱$ ہو تو ا، ب اور ج کی قیمتیں دریافت کرو۔

۸۔ اگر $\text{ما}^{۲} + ۲\,\text{ما} = \text{لا}\,(\text{ما} + ۱)$ تو ثابت کرو کہ ما کی ایک قیمت

$$\frac{۱}{۲}\,\text{لا} + \frac{۱}{۸}\,\text{لا}^{۲} - \frac{۱}{۱۲۸}\,\text{لا}^{۴} + \ldots\ldots \text{ہے۔}$$

۹۔ اگر $\text{ج لا}^{۳} + \text{ا لا} - \text{ما} = ۰$ تو ثابت کرو کہ لا کی ایک قیمت

$$\frac{\text{ما}}{\text{ا}} - \frac{\text{ج ما}^{۳}}{\text{ا}^{۴}} + \frac{۳\,\text{ج}^{۲}\,\text{ما}^{۵}}{\text{ا}^{۷}} - \frac{۱۲\,\text{ج}^{۳}\,\text{ما}^{۷}}{\text{ا}^{۱۰}} + \ldots\ldots \text{ہے}$$

اس سے ثابت کرو کہ $\text{لا} = ٫۰۰۹۹۹۹۹۹$ مساوات $\text{لا}^{۳} + ۱۰۰\,\text{لا} - ۱ = ۰$ کا ایک تقریبی حل ہے، نیز بتاؤ کہ یہ جواب اعشاریہ کے کس مقام تک درست ہے۔

۱۰۔ اگر $(۱ + \text{لا})(۱ + \text{ا لا})(۱ + \text{ا}^{۲}\,\text{لا})(۱ + \text{ا}^{۳}\,\text{لا})\ldots\ldots$ میں اجزائے ضربی کی تعداد لا متناہی ہو اور $\text{ا} < ۱$ تو ثابت کرو کہ اس میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر

$$\frac{۱}{(۱ - \text{ا})(۱ - \text{ا}^{۲})(۱ - \text{لا}^{۳})\ldots(۱ - \text{ا}^{\text{ر}})}\;\text{ا}^{\frac{۱}{۲}\text{ر}(\text{ر} - ۱)} \quad \text{ہے۔}$$

۱۱۔ اگر $\text{ا} < ۱$ تو $\frac{۱}{(۱ - \text{ا لا})(۱ - \text{ا}^{۲}\,\text{لا})(۱ - \text{ا}^{۳}\,\text{لا})\ldots \text{تا لا متناہی}}$ کی تفصیل میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر دریافت کرو۔

۱۲۔ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$(۱)\quad \text{ن}^{\text{ن}+۱} - \text{ن}(\text{ن} - ۱)^{\text{ن}+۱} + \frac{\text{ن}(\text{ن} - ۱)}{\underline{|۲}}(\text{ن} - ۲)^{\text{ن}+۱} - \ldots\ldots = \frac{۱}{۲}\,\text{ن}\,\underline{|\text{ن}+۱}$$

$$(۲)\quad ن^{ن} - (ن+۱)(ن-۱)^{ن} + \frac{(ن+۱)ن}{\lfloor ۲}(ن-۲)^{ن} - \cdots\cdots = ۱$$

جہاں دونوں سلسلوں میں تعداد رقوم ن ہے اور

$$(۳)\quad ۱^{ن} - ن \times ۲^{ن} + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} \times ۳^{ن} - \cdots\cdots = (-۱)^{ن} \lfloor ن$$

$$(۴)\quad (ن+ق)^{ن} - ن(ن+ق-۱)^{ن} + \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲}(ن+ق-۲)^{ن} - \cdots = \lfloor ن$$

جہاں آخر کے دو سلسلوں میں تعدادِ رقوم (ن + ۱) ہے۔



تیئسواں باب

جزوی کسور

۳۱۵۔ ابتدائی جبر و مقابلہ میں بتایا جا چکا ہے کہ اگر ایسی کسروں کا ایک جٹ دیا ہوا ہو جو علامات مثبت اور منفی سے باہم منسلک ہوں تو ان کو ایک سادہ شکل کی واحد کسر میں تحویل کر سکتے ہیں جس کا نسب نما ان کسروں کے نسب نماؤں کے ذو اضعاف اقل کے مساوی ہوتا ہے، بعض اوقات اس عمل کے متضاد عمل کی ضرورت پیش آتی ہے یعنے ایک کسر کو مقابلۃً سادہ یعنی جزوی کسور میں توڑنا پڑتا ہے، مثلاً اگر ہم کسر $\frac{۳ - ۵ لا}{۱ - ۴ لا + ۳ لا^{۲}}$ کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلانا چاہیں تو ہم دفعہ ۳۱۴ مشق ا کا طریقہ استعمال کرنے سے سلسلہ مطلوبہ کی جتنی رقمیں چاہیں حاصل کر سکتے ہیں، لیکن اگر ہم اس سلسلہ کی عام رقم معلوم کرنا چاہیں تو یہ طریقہ کارگر نہیں ہوتا، اس کے لئے نہایت آسان طریقہ یہ ہے کہ کسر مذکور کو دو کسور $\frac{۱}{۱ - لا} + \frac{۲}{۱ - ۳ لا}$ کی معادل شکل میں تحویل کر لیا جائے۔ اب ہم ان دونوں جملوں یعنی $(۱ - لا)^{-۱}$ اور $(۱ - ۳ لا)^{-۱}$ کو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلا سکتے ہیں اور اس بناء پر عام رقم معلوم کر سکتے ہیں۔

۳۱۶- باب ہذا میں ہم کسی منطق کسر کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے کے مسئلہ کی توضیح کے لئے چند مثالیں درج کریں گے، اس مضمون پر زیادہ بسیط اور مفصل بحث کے لئے طالب علم سیریٹ کے "اعلیٰ الجبرا کا کورس" یا "احصائے تکملات" کی کتابوں کو ملاحظہ کرے
ان کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ

(۱) ہر منطق کسر، جزوی کسور کے ایک مجموعہ میں تحلیل کی جاسکتی ہے

(۲) اگر اصلی نسب نما میں کوئی خطی جزو ضربی (لا - ا) کی شکل کا ہو تو اسکے متناظر ہمیں $\frac{\text{ا}'}{\text{لا} - \text{ا}}$ کی شکل کی ایک جزوی کسر حاصل ہوتی ہے اور اگر اصلی کسر کے نسب نما میں (لا - ب) کی شکل کے خطی جزو ضربی کی دوسری قوت واقع ہو تو اس کے جواب میں $\frac{\text{ب}'}{(\text{لا} - \text{ب})}$ اور $\frac{\text{ب}''}{(\text{لا} - \text{ب})^2}$ کو شکل کی دو جزوی کسریں حاصل ہوتی ہیں، اسی طرح اگر (لا - ب) تین بار واقع ہو تو ان دو جزوی کسروں کے علاوہ ایک اور کسر $\frac{\text{ب}'''}{(\text{لا} - \text{ب})^3}$ حاصل ہوتی ہے، علیٰ ہذا القیاس۔

(۳) اگر اصلی کسر کے نسب نما میں درجہ دوم کا ایک جزو ضربی $\text{لا}^2 + \text{ن لا} + \text{ق}$ کی شکل کا ہو تو اس کے جواب میں $\frac{\text{ن}'\,\text{لا} + \text{ق}'}{\text{لا}^2 + \text{ن لا} + \text{ق}}$ کی شکل کی ایک جزوی کسر حاصل ہوتی ہے اور اگر ابتدائی کسر کے نسب نما میں جزو ضربی $\text{لا}^2 + \text{ن لا} + \text{ق}$ کی دوسری قوت واقع ہو تو اس کے علاوہ $\frac{\text{ن}''\,\text{لا} + \text{ق}''}{(\text{لا}^2 + \text{ن لا} + \text{ق})^2}$ کی شکل کی ایک اور

جزوی کسر حاصل ہوتی ہے۔ علیٰ ہذالقیاس
یہاں مقادیر اَ، بَ، بً، بٓ....، نَ، قَ، نً، قً
میں سے کوئی مقدار بھی لا کا تفاعل نہیں ہے۔
ہم اِن نتائج کو ذیل کی مثالوں میں استعمال کرینگے۔

مثال ۱۔ $\frac{۵لا - ۱۱}{۲لا^{۲} + لا - ۶}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کرو۔

چونکہ نسب نما $۲لا^{۲} + لا - ۶ = (لا + ۲)(۲لا - ۳)$ اس لئے ہم جائز طور پر فرض کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{۵لا - ۱۱}{۲لا^{۲} + لا - ۶} = \frac{ا}{لا + ۲} + \frac{ب}{۲لا - ۳}$$

جہاں مقادیر ا اور ب، لا کے تابع نہیں ہیں اور اِن کی قیمتیں معلوم کرنا مطلوب ہے۔ کسروں کو صاف کرنے سے

$$۵لا - ۱۱ = ا(۲لا - ۳) + ب(لا + ۲)$$

چونکہ یہ مساوات متماثل طور پر درست ہے اس لئے ہم لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کر سکتے ہیں، ایسا کرنے سے

$$۲ا + ب = ۵$$
$$-۳ا + ۲ب = -۱۱$$

جس سے ا = ۳، ب = -۱

$$\therefore \frac{۵لا - ۱۱}{۲لا^{۲} + لا - ۶} = \frac{۳}{لا + ۲} - \frac{۱}{۲لا - ۳}$$

مثال ۲۔ $\frac{م لا + ن}{(لا - ا)(لا + ب)}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کرو

فرض کرو کہ $\frac{م لا + ن}{(لا - ا)(لا + ب)} = \frac{اَ}{لا - ا} + \frac{بَ}{لا + ب}$

$$\therefore \text{م لا} + \text{ن} = \text{اَ}(\text{لا} + \text{ب}) + \text{بَ}(\text{لا} - \text{ا}) \quad \ldots\ldots(۱)$$

اب ہم سروں کو مساوی کرنے سے اَ اور بَ کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں لیکن حسب ذیل طریق پر عمل کرنا زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے۔ چونکہ اَ اور بَ، لا سے تابع نہیں ہیں، اس لئے ہم لا کو جو قیمت چاہیں دے سکتے ہیں

(۱) میں رکھو لا - ا = ۰ یعنی لا = ا، تب

$$\text{اَ} = \frac{\text{م ا} + \text{ن}}{\text{ا} + \text{ب}}$$

اب رکھو لا + ب = ۰ یعنی لا = - ب تب

$$\text{بَ} = \frac{\text{م ب} - \text{ن}}{\text{ا} + \text{ب}}$$

$$\therefore \frac{\text{م لا} + \text{ن}}{(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} + \text{ب})} = \frac{۱}{\text{ا} + \text{ب}}\left(\frac{\text{م ا} + \text{ن}}{\text{لا} - \text{ا}} + \frac{\text{م ب} - \text{ن}}{\text{لا} + \text{ب}}\right)$$

مثال ۳۔ $\frac{۲۳\,\text{لا} - ۱۱\,\text{لا}^۲}{(۲\,\text{لا} - ۱)(۹ - \text{لا}^۲)}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کرو۔

فرض کرو کہ

$$\frac{۲۳\,\text{لا} - ۱۱\,\text{لا}^۲}{(۲\,\text{لا} - ۱)(۳ + \text{لا})(۳ - \text{لا})} = \frac{\text{ا}}{۲\,\text{لا} - ۱} + \frac{\text{ب}}{۳ + \text{لا}} + \frac{\text{ج}}{۳ - \text{لا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(۱)$$

$$\therefore ۲۳\,\text{لا} - ۱۱\,\text{لا}^۲ = \text{ا}(۳ + \text{لا})(۳ - \text{لا}) + \text{ب}(۲\,\text{لا} - ۱)(۳ - \text{لا}) + \text{ج}(۲\,\text{لا} - ۱)(۳ + \text{لا})$$

بالترتیب ۲ لا - ۱ = ۰، ۳ + لا = ۰، ۳ - لا = ۰ رکھنے سے

$$\text{ا} = ۱،\ \text{ب} = ۲،\ \text{ج} = -۱$$

$$\therefore \frac{23\text{لا} - 11\text{لا}^2}{(2\text{لا}-1)(9-\text{لا}^2)} = \frac{1}{2\text{لا}-1} + \frac{4}{3+\text{لا}} - \frac{1}{3-\text{لا}}$$

مثال ۴۔ $\frac{3\text{لا}^2+\text{لا}-2}{(\text{لا}-2)^2(1-2\text{لا})}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{3\text{لا}^2+\text{لا}-2}{(\text{لا}-2)^2(1-2\text{لا})} = \frac{\text{ا}}{1-2\text{لا}} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}-2} + \frac{\text{ج}}{(\text{لا}-2)^2}$

$$\therefore 3\text{لا}^2+\text{لا}-2 = \text{ا}(\text{لا}-2)^2 + \text{ب}(1-2\text{لا})(\text{لا}-2) + \text{ج}(1-2\text{لا})$$

اب رکھو $1-2\text{لا}=0$، تب $\text{ا} = -\frac{1}{3}$

$\text{لا}-2=0$ رکھنے سے $\text{ج} = -4$

ب کی قیمت معلوم کرنے کے لئے لا^2 کے سروں کو مساوی کرو، اس طرح

$3 = \text{ا} - 2\text{ب}$ جس سے $\text{ب} = -\frac{5}{3}$

$$\therefore \frac{3\text{لا}^2+\text{لا}-2}{(\text{لا}-2)^2(1-2\text{لا})} = -\frac{1}{3(1-2\text{لا})} - \frac{5}{3(\text{لا}-2)} - \frac{4}{(\text{لا}-2)^2}$$

مثال ۵۔ $\frac{42-19\text{لا}}{(\text{لا}^2+1)(\text{لا}-4)}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{42-19\text{لا}}{(\text{لا}^2+1)(\text{لا}-4)} = \frac{\text{الا}+\text{ب}}{\text{لا}^2+1} + \frac{\text{ج}}{\text{لا}-4}$

$$\therefore 42-19\text{لا} = (\text{الا}+\text{ب})(\text{لا}-4) + \text{ج}(\text{لا}^2+1)$$

فرض کرو کہ $\text{لا}=4$، تب $\text{ج}=-2$

لا^2 کے سروں کو مساوی کرنے سے

$\text{۰} = \text{ا} + \text{ج}$ اور $\text{ا} = \text{۲}$

مطلق رقموں کو مساوی رکھنے سے

$\text{۴۲} = -\text{۴ب} + \text{ج}$ اور $\text{ب} = -\text{۱۱}$

$$\therefore \frac{\text{۴۲} - \text{۱۹لا}}{(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱})(\text{لا} - \text{۴})} = \frac{\text{۲لا} - \text{۱۱}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱}} - \frac{\text{۲}}{\text{لا} - \text{۴}}$$

۳۱۷- ذیل کی مثال میں جو حکمتِ عملی استعمال کی گئی ہے وہ بھی اکثر اوقات مفید ثابت ہوتی ہے۔

مثال- $\dfrac{\text{۹لا}^{\text{۳}} - \text{۲۴لا}^{\text{۲}} + \text{۴۸لا}}{(\text{لا} - \text{۲})^{\text{۴}}(\text{لا} + \text{۱})}$ کو اس کی جزوی کسروں میں تحلیل کرو۔

$$\frac{\text{۹لا}^{\text{۳}} - \text{۲۴لا}^{\text{۲}} + \text{۴۸لا}}{(\text{لا} - \text{۲})^{\text{۴}}(\text{لا} + \text{۱})} = \frac{\text{ا}}{\text{لا} + \text{۱}} + \frac{\text{ف(لا)}}{(\text{لا} - \text{۲})^{\text{۴}}}$$

جہاں ا کوئی مستقل مقدار ہے اور ف (لا)، لا کا کوئی تفاعل ہے اور ان کی قیمتیں معلوم کرنا مقصود ہے۔

$$\therefore \text{۹لا}^{\text{۳}} - \text{۲۴لا}^{\text{۲}} + \text{۴۸لا} = \text{ا}(\text{لا} - \text{۲})^{\text{۴}} + (\text{لا} + \text{۱})\,\text{ف(لا)}$$

فرض کرو کہ لا = -۱، تب ا = -۱، تب ا کی قیمت درج کرنے اور عمل نقل سے

$$(\text{لا} + \text{۱})\,\text{ف(لا)} = (\text{لا} - \text{۲})^{\text{۴}} + \text{۹لا}^{\text{۳}} - \text{۲۴لا}^{\text{۲}} + \text{۴۸لا}$$

$$= \text{لا}^{\text{۴}} + \text{لا}^{\text{۳}} + \text{۱۶لا} + \text{۱۶}$$

$$\therefore \text{ف(لا)} = \text{لا}^{\text{۳}} + \text{۱۶}$$

$\frac{\text{لا}^3+16}{(\text{لا}-2)^4}$ کے متناظر جو جزوی کسور ہیں انہیں معلوم کرنیکے لئے
$\text{لا}-2=\text{ی}$ رکھو

تب $\frac{\text{لا}^3+16}{(\text{لا}-2)^4}=\frac{(\text{ی}+2)^3+16}{\text{ی}^4}=\frac{\text{ی}^3+6\text{ی}^2+12\text{ی}+24}{\text{ی}^4}$

$$=\frac{1}{\text{ی}}+\frac{6}{\text{ی}^2}+\frac{12}{\text{ی}^3}+\frac{24}{\text{ی}^4}$$

$$=\frac{1}{\text{لا}-2}+\frac{6}{(\text{لا}-2)^2}+\frac{12}{(\text{لا}-2)^3}+\frac{24}{(\text{لا}-2)^4}$$

$$\therefore \frac{9\text{لا}^3-24\text{لا}^2+48\text{لا}}{(\text{لا}-2)^4(\text{لا}+1)}=-\frac{1}{\text{لا}+1}+\frac{1}{\text{لا}-2}+\frac{6}{(\text{لا}-2)^2}+\frac{12}{(\text{لا}-2)^3}+\frac{24}{(\text{لا}-2)^4}$$

۳۱۸ - اب تک جو مثالیں حل کی گئی ہیں اُن سب میں شمار کنندہ کا بُعد نسب نما کے بُعد سے کم تھا۔ اگر ایسا نہ ہو تو شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کرلینا چاہیے حتیٰ کہ جو باقی حاصل ہو اسکا بُعد نسب نما کے بُعد سے کم ہو۔

مثال - $\frac{6\text{لا}^3+5\text{لا}^2-7}{3\text{لا}^2-2\text{لا}-1}$ کو اس کی جزوی کسروں میں تحلیل کرو

تقسیم کرنے سے $\frac{6\text{لا}^3+5\text{لا}^2-7}{3\text{لا}^2-2\text{لا}-1}=2\text{لا}+3+\frac{8\text{لا}-4}{3\text{لا}^2-2\text{لا}-1}$

اور $\frac{8\text{لا}-4}{3\text{لا}^2-2\text{لا}-1}=\frac{5}{3\text{لا}+1}+\frac{1}{\text{لا}-1}$

$$\therefore \frac{۶\text{لا}^{۳}+۵\text{لا}^{۲}-۷}{۳\text{لا}^{۲}-۲\text{لا}-۱} = ۲\text{لا}+۳+\frac{۵}{۳\text{لا}+۱}+\frac{۱}{\text{لا}-۱}$$

۳۱۹- اب ہم یہ بتائینگے کہ کس طرح جزوی کسور میں تحلیل کرنے سے کسی منطق کسر کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

مثال ۱- اگر $\frac{۳\text{لا}^{۲}+\text{لا}-۲}{(\text{لا}-۲)^{۲}(۱-۲\text{لا})}$ کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلایا جائے تو تفصیل کی عام رقم معلوم کرو۔

دفعہ ۳۱۶ کی مثال ۴ کی رُو سے

$$\frac{۳\text{لا}^{۲}+\text{لا}-۲}{(\text{لا}-۲)^{۲}(۱-۲\text{لا})} = -\frac{۱}{۳(۱-۲\text{لا})}-\frac{۵}{۳(\text{لا}-۲)}-\frac{۴}{(\text{لا}-۲)^{۲}}$$

$$= -\frac{۱}{۳(۱-۲\text{لا})}+\frac{۵}{۳(۲-\text{لا})}-\frac{۴}{(۲-\text{لا})^{۲}}$$

$$= -\frac{۱}{۳}(۱-۲\text{لا})^{-۱}+\frac{۵}{۶}\left(۱-\frac{\text{لا}}{۲}\right)^{-۱}-\left(۱-\frac{\text{لا}}{۲}\right)^{-۲}$$

پس تفصیل کی عام رقم

$$\left(-\frac{۲^{ر}}{۳}+\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۲^{ر}}-\frac{ر+۱}{۲^{ر}}\right)\text{لا}^{ر}$$

ہے۔

مثال ۲- $\frac{۷+\text{لا}}{(۱+\text{لا})(۱+\text{لا}^{۲})}$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ اور تفصیل کی عام رقم معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{۷+\text{لا}}{(۱+\text{لا})(۱+\text{لا}^{۲})} = \frac{\text{ا}}{۱+\text{لا}}+\frac{\text{ب لا}+\text{ج}}{۱+\text{لا}^{۲}}$

$$\therefore ۷+\text{لا} = \text{ا}(۱+\text{لا}^{۲})+(\text{ب لا}+\text{ج})(۱+\text{لا})$$

$۱ + \text{لا} = ۰$ رکھو، تب $\text{ا} = ۳$

رقوم مطلق کو مساوی کرنے سے $۷ = \text{ا} + \text{ج}$ جس سے $\text{ج} = ۴$

$\text{لا}^{۲}$ کے سروں کو مساوی کرنے سے $۰ = \text{ا} + \text{ب}$ جس سے $\text{ب} = -۳$

$$\therefore \frac{۷ + \text{لا}}{(۱+\text{لا})(۱+\text{لا}^{۲})} = \frac{۳}{۱ + \text{لا}} + \frac{۴ - ۳\text{لا}}{۱ + \text{لا}^{۲}}$$

$$= ۳(۱+\text{لا})^{-۱} + (۴ - ۳\text{لا})(۱+\text{لا}^{۲})^{-۱}$$

$$= ۳\left\{۱ - \text{لا} + \text{لا}^{۲} - \ldots\ldots + (-۱)^{\text{ف}}\text{لا}^{\text{ف}} + \ldots\right\}$$

$$+ (۴ - ۳\text{لا})\left\{۱ - \text{لا}^{۲} + \text{لا}^{۴} \ldots\ldots (-۱)^{\text{ف}}\text{لا}^{۲\text{ف}} + \ldots\right\}$$

$\text{لا}^{\text{ل}}$ کا سر اسطرح معلوم کرو۔

(۱) اگر ل جفت ہو تو دوسرے سلسلہ میں $\text{لا}^{\text{ل}}$ کا سر $۴(-۱)^{\frac{\text{ل}}{۲}}$ ہے

اس لئے تفصیل میں $\text{لا}^{\text{ل}}$ کا سر $۳ + ۴(-۱)^{\frac{\text{ل}}{۲}}$ ہے

(۲) اگر ل طاق ہو تو دوسرے سلسلہ میں $\text{لا}^{\text{ل}}$ کا سر $-۳(-۱)^{\frac{\text{ل}-۱}{۲}}$ ہے، پس تفصیل میں مطلوبہ سر $۳(-۱)^{\frac{\text{ل}+۱}{۲}} - ۳$ ہے۔

امثلہ نمبری ۲۳

جزوی کسور میں تحلیل کرو۔

(۱) $\dfrac{۷\text{لا} - ۱}{۱ - ۵\text{لا} + ۶\text{لا}^{۲}}$　　(۲) $\dfrac{۴۶ + ۱۳\text{لا}}{۱۲\text{لا}^{۲} - ۱۱\text{لا} - ۱۵}$

(۳) $\dfrac{۱ + ۳\text{لا} + ۲\text{لا}^{۲}}{(۱ - ۲\text{لا})(۱ - \text{لا}^{۲})}$　　(۴) $\dfrac{\text{لا}^{۲} - ۱۰\text{لا} + ۱۳}{(\text{لا} - ۱)(\text{لا}^{۲} - ۵\text{لا} + ۶)}$

(۵) $\frac{۲\text{لا}^{۳} + \text{لا}^{۲} - \text{لا} - ۳}{\text{لا}(\text{لا} - ۱)(۲\text{لا} + ۳)}$ (۶) $\frac{۹}{(\text{لا} - ۱)(\text{لا} + ۲)^{۲}}$

(۷) $\frac{\text{لا}^{۴} - ۳\text{لا}^{۳} - ۳\text{لا}^{۲} + ۱۰}{(\text{لا} + ۱)^{۲}(\text{لا} - ۳)}$ (۸) $\frac{۲۶\text{لا}^{۲} + ۲۰۸\text{لا}}{(\text{لا}^{۲} + ۱)(\text{لا} + ۵)}$

(۹) $\frac{۲\text{لا}^{۲} - ۱۱\text{لا} + ۵}{(\text{لا} - ۳)(\text{لا}^{۲} + ۲\text{لا} - ۵)}$ (۱۰) $\frac{۳\text{لا}^{۳} - ۸\text{لا}^{۲} + ۱۰}{(\text{لا} - ۱)^{۴}}$

(۱۱) $\frac{۵\text{لا}^{۳} + ۶\text{لا}^{۲} + ۵\text{لا}}{(\text{لا}^{۲} - ۱)(\text{لا} + ۱)^{۳}}$

اگر ذیل کے جملات کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلایا جائے تو تفصیل کی عام رقم دریافت کرو

(۱۲) $\frac{۱ + ۳\text{لا}}{۱ + ۱۱\text{لا} + ۲۸\text{لا}^{۲}}$ (۱۳) $\frac{۵\text{لا} + ۶}{(۲ + \text{لا})(۱ - \text{لا})}$

(۱۴) $\frac{\text{لا}^{۲} + ۷\text{لا} + ۳}{\text{لا}^{۲} + ۷\text{لا} + ۱۰}$ (۱۵) $\frac{۲\text{لا} - ۴}{(۱ - \text{لا}^{۲})(۱ - ۲\text{لا})}$

(۱۶) $\frac{۴ + ۳\text{لا} + ۲\text{لا}^{۲}}{(۱ - \text{لا})(۱ + \text{لا} - ۲\text{لا}^{۲})}$ (۱۷) $\frac{۳ + ۲\text{لا} - \text{لا}^{۲}}{(۱ + \text{لا})(۱ - ۴\text{لا})^{۲}}$

(۱۸) $\frac{۴ + ۷\text{لا}}{(۲ + ۳\text{لا})(۱ + \text{لا})^{۲}}$ (۱۹) $\frac{۲\text{لا} + ۱}{(\text{لا} - ۱)(\text{لا}^{۲} + ۱)}$

(۲۰) $\frac{۱ - \text{لا} + ۲\text{لا}^{۲}}{(۱ + \text{لا})^{۳}}$ (۲۱) $\frac{۱}{(۱ - \text{ا}\,\text{لا})(۱ - \text{ب}\,\text{لا})(۱ - \text{ج}\,\text{لا})}$

(۲۲)
$$\frac{\text{۳} - \text{۲}\,\text{لا}^{\text{۲}}}{(\text{۲} - \text{۳}\,\text{لا} + \text{لا}^{\text{۲}})^{\text{۲}}}$$

(۲۳) سلاسل ذیل کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو

(۱)
$$\frac{\text{۱}}{(\text{۱}+\text{لا})(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}})} + \frac{\text{لا}}{(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}})(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۳}})} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۳}})(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۴}})} + \cdots$$

(۲)
$$\frac{\text{لا}(\text{۱}-\text{ا}\,\text{لا})}{(\text{۱}+\text{لا})(\text{۱}+\text{ا}\,\text{لا})(\text{۱}+\text{ا}^{\text{۲}}\text{لا})} + \frac{\text{ا}\,\text{لا}(\text{۱}-\text{ا}^{\text{۲}}\text{لا})}{(\text{۱}+\text{ا}\,\text{لا})(\text{۱}+\text{ا}^{\text{۲}}\text{لا})(\text{۱}+\text{ا}^{\text{۳}}\text{لا})} + \cdots$$

(۲۴) ذیل کے لامتناہی سلسلہ کا حاصل جمع معلوم کرو جبکہ لا > ۱

$$\frac{\text{۱}}{(\text{۱}-\text{لا})(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۳}})} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۳}})(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۵}})} + \frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۵}})(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۷}})} + \cdots$$

(۲۵) اُس سلسلہ کی ن رقموں کا مجموعہ معلوم کرو جبکی ق ویں رقم

$$\frac{\text{لا}^{\text{ق}}(\text{۱}+\text{لا}^{\text{ق}+\text{۱}})}{(\text{۱}-\text{لا}^{\text{ق}})(\text{۱}-\text{لا}^{\text{ق}+\text{۱}})(\text{۱}-\text{لا}^{\text{ق}+\text{۲}})}$$

ہے

۲۶- ثابت کرو کہ حروف ا، ب، ج اور اُن کی قوتوں سے ن ابعاد کے جو مختلف متجانس حاصل ضرب بن سکتے ہیں اُن کا مجموعہ

$$\frac{\text{ا}^{\text{ن}+\text{۲}}(\text{ب}-\text{ج}) + \text{ب}^{\text{ن}+\text{۲}}(\text{ج}-\text{ا}) + \text{ج}^{\text{ن}+\text{۲}}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{ا}^{\text{۲}}(\text{ب}-\text{ج}) + \text{ب}^{\text{۲}}(\text{ج}-\text{ا}) + \text{ج}^{\text{۲}}(\text{ا}-\text{ب})}$$

ہے -

چوبیسواں باب

متوالی سلسلے

۳۲۰ - اگر ایک سلسلہ $ع_{۰} + ع_{۱} + ع_{۲} + ع_{۳} + \ldots\ldots$ ایسا ہو کہ اس میں کسی مقررہ رقم سے اس کے بعد کی ہر ایک رقم رقومِ ماقبل کی ایک خاص تعداد کو کسی مستقل مقادیر سے بالترتیب ضرب دیکر ان حاصل ضربوں کو جمع کرنے سے حاصل ہو تو اس کو متوالی سلسلہ کہتے ہیں۔

۳۲۱ - سلسلہ $۱ + ۲لا + ۳لا^{۲} + ۴لا^{۳} + ۵لا^{۴} + \ldots\ldots$ میں دوسری رقم کے بعد ہر ایک رقم دو رقوم ماقبل کو بالترتیب مستقلات $۲لا$ اور $-لا^{۲}$ سے ضرب دیکر حاصل ضربوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتی ہے، ان مقادیر کو مستقل اس لئے کہا گیا ہے کیونکہ یہ ن کی ہر قیمت کے لئے وہی رہتی ہیں مثلاً

$$۵لا^{۴} = ۲لا \times ۴لا^{۳} + (-لا^{۲}) \times ۳لا^{۲}$$

یعنی $ع_{۴} = ۲لا\, ع_{۳} - لا^{۲}\, ع_{۲}$

عام طور پر جب ن ایک سے بڑا ہو تو ہر ایک رقم اپنے عین پہلے کی دو رقوم کے ساتھ مساوات

$$ع_{ن} = ۲لا\, ع_{ن-۱} - لا^{۲}\, ع_{ن-۲}$$

یا $$ع_{ن} - ۲لا\, ع_{ن-۱} + لا^{۲}\, ع_{ن-۲} = ۰$$

سے مربوط ہوتی ہے۔

اس مساوات میں $ع_{ن}$، $ع_{ن-۱}$، $ع_{ن-۲}$ کے سر مع اپنی علامات کے "ربط کا پیمانہ" کہلاتے ہیں۔

پس سلسلہ $۱ + ۲ لا + ۳ لا^{۲} + ۴ لا^{۳} + ۵ لا^{۴} + \dots$ ایک متوالی سلسلہ ہے جس میں ربط کا پیمانہ یہ ہے

$$۱ - ۲ لا + لا^{۲}$$

۳۲۲۔ جب کسی سلسلہ کے ربط کا پیمانہ دیا ہوا ہو تو سلسلہ کی ہر ایک رقم معلوم ہو سکتی ہے بشرطیکہ رقم مطلوبہ سے پہلی رقموں کی کافی تعداد معلوم ہو۔ چونکہ عمل کا طریقہ ایک ہی ہے خواہ ربط کا پیمانہ کتنی ہی رقوم پر مشتمل ہو اس لئے صرف ذیل کی مثال کافی ہوگی۔

اگر سلسلہ $ا_{۰} + ا_{۱} لا + ا_{۲} لا^{۲} + ا_{۳} لا^{۳} + \dots$ میں ربط کا پیمانہ $۱ - ق لا - ل لا^{۲} - ر لا^{۳}$ ہو تو ظاہر ہے کہ

$$ا_{ن} لا^{ن} = ق لا \times ا_{ن-۱} لا^{ن-۱} + ل لا^{۲} \times ا_{ن-۲} لا^{ن-۲} + ر لا^{۳} \times ا_{ن-۳} لا^{ن-۳}$$

یعنی $ا_{ن} = ق ا_{ن-۱} + ل ا_{ن-۲} + ر ا_{ن-۳}$

پس کسی رقم کا سر معلوم ہو سکتا ہے بشرطیکہ اس سے پہلے کی تین رقوم کے سر معلوم ہوں۔

۳۲۳۔ برعکس اس کے اگر ایک سلسلہ کی رقوم کی کافی تعداد دی ہوئی ہو تو اسکے ربط کا پیمانہ دریافت ہو سکتا ہے۔

مثال ۔ متوالی سلسلہ

۲ + ۵ لا + ۱۳ لا^2 + ۳۵ لا^3 + ...

کے ربط کا پیمانہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ربط کا پیمانہ

۱ ـ ق لا ـ ل لا^2 ہے

تب ق اور ل کی قیمتیں ذیل کی مساواتوں سے معلوم ہوتی ہیں

۱۳ ـ ۵ ق ـ ۲ ل = ۰ اور ۳۵ ـ ۱۳ ق ـ ۵ ل = ۰

اِن سے ق = ۵ اور ل = ـ ۶، پس مطلوبہ ربط کا پیمانہ

۱ ـ ۵ لا + ۶ لا^2 ہے۔

۳۲۴ ـ اگر ربط کا پیمانہ ۳ رقوم پر مشتمل ہو تو اس میں دو مستقل مقداریں ق اور ل ہونگی اِن دو مقادیر ق اور ل کو معلوم کرنیکے لئے کم از کم دو مساواتیں ہونی چاہئیں ۔ پہلی مساوات معلوم کرنیکے لئے ہمیں سلسلہ کی تین رقوم معلوم ہونا ضروری ہے اور دوسری مساوات بنانے کے لئے اِن کے علاوہ ایک اور رقم کے معلوم ہونیکی ضرورت ہے، پس ظاہر ہے کہ اگر ہمیں ایک ایسا ربط کا پیمانہ معلوم کرنا ہو جو دو مستقل مقادیر پر مشتمل ہو تو ہمیں سلسلہ کی کم از کم چار رقمیں معلوم ہونی چاہئیں ۔

اگر ربط کا پیمانہ ۱ ـ ق لا ـ ل لا^2 ـ ر لا^3 ہو تو تین مستقلات کو معلوم کرنے کے لئے تین مساواتوں کی ضرورت ہے، پہلی مساوات بنانے کے لئے ہمیں سلسلہ کی کم از کم ۴ رقمیں معلوم ہونی چاہئیں، باقی دو مساواتیں معلوم کرنے کے لئے دو اور رقمیں معلوم ہونی چاہئیں، پس ایک ایسا ربط کا پیمانہ معلوم کرنے کے لئے جس میں ۳ مستقلات ہوں سلسلہ کی کم از کم چھ رقوم کا معلوم ہونا ضروری ہے ۔

بالعموم ایک ایسا ربط کا پیمانہ معلوم کرنیکے لئے جو م مستقلات پر

مشتمل ہو ہمیں کم از کم ۲م مسلسل رقوم معلوم ہونی چاہئے۔ برعکس اس کے اگر ۲م مسلسل رقوم دی ہوئی ہوں تو ہم ربط کا پیمانہ حسب ذیل فرض کرسکتے ہیں

$$۱ - ق_{۱} لا - ق_{۲} لا^{۲} - ق_{۳} لا^{۳} - ق_{۴} لا^{۴} ...... - ق_{م} لا^{م}$$

۳۲۵ — متوالی سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔ خواہ ربط کا پیمانہ کچھ ہی ہو، حاصل جمع معلوم کرنے کا طریقہ ہر حالت میں وہی ہے سہولت کی خاطر ہم فرض کرتے ہیں کہ اس میں صرف دو مستقل مقادیر شامل ہیں۔
فرض کرو کہ سلسلہ

$$ا_{۰} + ا_{۱} لا + ا_{۲} لا^{۲} + ا_{۳} لا^{۳} + ... (۱)$$

ہے اور اس کا حاصل جمع ج ہے، نیز فرض کرو کہ ربط کا پیمانہ $۱ - ق لا - ل لا^{۲}$ ہے۔ پس ن کی ہر قیمت کے لئے جو ایک سے بڑی ہو

$$ا_{ن} - ق ا_{ن-۱} - ل ا_{ن-۲} = ۰$$

$$\text{اب} \quad ج = ا_{۰} + ا_{۱} لا + ا_{۲} لا^{۲} + ... + ا_{ن-۱} لا^{ن-۱}$$

$$- ق لا ج = - ق ا_{۰} لا - ق ا_{۱} لا^{۲} - ...... - ق ا_{ن-۲} لا^{ن-۱} - ق ا_{ن-۱} لا^{ن}$$

$$- ل لا^{۲} ج = - ل ا_{۰} لا^{۲} - ...... - ل ا_{ن-۳} لا^{ن-۱} - ل ا_{ن-۲} لا^{ن} - ل ا_{ن-۱} لا^{ن+۱}$$

$$\therefore (۱ - ق لا - ل لا^{۲}) ج = ا_{۰} + (ا_{۱} - ق ا_{۰}) لا - (ق ا_{ن-۱} + ل ا_{ن-۲}) لا^{ن}$$

$$- ل ا_{ن-۱} لا^{ن+۱}$$

کیونکہ ربط $\text{ا}_{\text{ن}} - \text{ق}\,\text{ا}_{\text{ن}-۱} - \text{ل}\,\text{ا}_{\text{ن}-۲} = ۰$ کی بدولت لا کی باقی سب قوتوں کے سر صفر ہیں

$$\therefore \text{ج} = \frac{\text{ا}_۰ + (\text{ا}_۱ - \text{ق}\,\text{ا}_۰)\,\text{لا}}{۱ - \text{ق}\,\text{لا} - \text{ل}\,\text{لا}^۲} - \frac{(\text{ق}\,\text{ا}_{\text{ن}-۱} + \text{ل}\,\text{ا}_{\text{ن}-۲})\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ل}\,\text{ا}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا}^{\text{ن}+۱}}{۱ - \text{ق}\,\text{لا} - \text{ل}\,\text{لا}^۲}$$

پس اس متوالی سلسلہ کا حاصل جمع ایک ایسی کسر ہے جس کا نسب نما ربط کا پیمانہ ہے۔

۳۲۶ ۔ دفعہ ماقبل کے جواب میں اگر دوسری کسر لا انتہا چھوٹی ہو جائے جب ن لا انتہا بڑھ جائے تو رقوم کی لا متناہی تعداد کا حاصل جمع

$$\frac{\text{ا}_۰ + (\text{ا}_۱ - \text{ق}\,\text{ا}_۰)\,\text{لا}}{۱ - \text{ق}\,\text{لا} - \text{ل}\,\text{لا}^۲}$$ ہو جاتا ہے۔

اگر ہم اس کسر کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلائیں جیسا کہ دفعہ ۳۱۴ میں بتایا گیا ہے تو ہم اوپر کے سلسلہ کی جتنی رقمیں چاہیں حاصل کر سکتے ہیں اس بنا پر جملہ

$$\frac{\text{ا}_۰ + (\text{ا}_۱ - \text{ق}\,\text{ا}_۰)\,\text{لا}}{۱ - \text{ق}\,\text{لا} - \text{ل}\,\text{لا}^۲}$$

کو سلسلہ بالا کا تکوینی تفاعل کہتے ہیں۔

۳۲۷ ۔ دفعہ ۳۲۵ کے نتیجہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ا}_0 + (\text{ا}_1 - \text{ق}\,\text{ا}_0)\,\text{لا}}{1 - \text{ق}\,\text{لا} - \text{ل}\,\text{لا}^2} = \text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ا}_2\,\text{لا}^2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}$$

$$+ \frac{(\text{ق}\,\text{ا}_{\text{ن}-1} + \text{ل}\,\text{ا}_{\text{ن}-2})\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ل}\,\text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}+1}}{1 - \text{ق}\,\text{لا} - \text{ل}\,\text{لا}^2}$$

اس سے ظاہر ہے کہ اگرچہ تکوینی تفاعل

$$\frac{\text{ا}_0 + (\text{ا}_1 - \text{ق}\,\text{ا}_0)\,\text{لا}}{1 - \text{ق}\,\text{لا} - \text{ل}\,\text{لا}^2}$$

سے ہم سلسلہ بالا کی جتنی رقوم چاہیں حاصل کر سکتے ہیں تاہم اسکو سلسلہ

$$\text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ا}_2\,\text{لا}^2 + \text{ا}_3\,\text{لا}^3 + \ldots\ldots$$

کا حقیقی معادل تصور کرنا اسی صورت میں روا اور جائز ہو سکتا ہے جبکہ باقی

$$\frac{(\text{ق}\,\text{ا}_{\text{ن}-1} + \text{ل}\,\text{ا}_{\text{ن}-2})\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ل}\,\text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}+1}}{1 - \text{ق}\,\text{لا} - \text{ل}\,\text{لا}^2}$$

ن کے لا متناہی ہو جانے سے معدوم ہو جائے یعنی اگر سلسلہ متدق ہو

۳۲۸ — جب تکوینی تفاعل کو جزوی کسور کے ایک جٹ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکے تو متوالی سلسلہ کی عام رقم آسانی سے معلوم ہو سکتی ہے، مثلاً فرض کرو کہ تکوینی تفاعل کو جزوی کسور

$$\frac{\text{اَ}}{1 - \text{ا}\,\text{لا}} + \frac{\text{بَ}}{1 + \text{ب}\,\text{لا}} + \frac{\text{جَ}}{(1 - \text{ج}\,\text{لا})^2}$$

میں تحلیل کیا جا سکتا ہے، تب عام رقم

$$\text{اَ}\,\text{ا}^{\text{ر}} + (-1)^{\text{ر}}\,\text{بَ}\,\text{ب}^{\text{ر}} + (\text{ر}+1)\,\text{جَ}\,\text{ج}^{\text{ر}} \}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

ہو گی، اس صورت میں ن رقوم کا حاصل جمع دفعہ ۳۲۵ کے طریقہ کے بغیر حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال۔ متوالی سلسلہ

$$\text{۱} - \text{۷ لا} - \text{لا}^{\text{۲}} - \text{۴۳ لا}^{\text{۳}} - \ldots$$

کا تکوینی تفاعل، عام رقم، اور اس کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ربط کا پیمانہ $\text{۱} - \text{ق لا} - \text{ل لا}^{\text{۲}}$ ہے، تب

$$-\text{۱} + \text{۷ ق} - \text{ل} = \text{۰}، \quad -\text{۴۳} + \text{ق} + \text{۷ ل} = \text{۰}$$

جس سے ق = ۱، ل = ۶، اور ربط کا پیمانہ $\text{۱} - \text{لا} - \text{۶ لا}^{\text{۲}}$ ہے

فرض کرو کہ سلسلہ کا حاصل جمع ج ہے، تب

$$\text{ج} = \text{۱} - \text{۷ لا} - \text{لا}^{\text{۲}} - \text{۴۳ لا}^{\text{۳}} - \ldots$$

$$-\text{لا ج} = -\text{لا} + \text{۷ لا}^{\text{۲}} + \text{لا}^{\text{۳}} + \ldots$$

$$-\text{۶ لا}^{\text{۲}}\text{ج} = -\text{۶ لا}^{\text{۲}} + \text{۴۲ لا}^{\text{۳}} + \ldots$$

$$\therefore (\text{۱} - \text{لا} - \text{۶ لا}^{\text{۲}})\,\text{ج} = \text{۱} - \text{۸ لا}$$

$$\text{ج} = \frac{\text{۱} - \text{۸ لا}}{\text{۱} - \text{لا} - \text{۶ لا}^{\text{۲}}}$$

جو تکوینی تفاعل ہے۔

اگر ہم $\frac{\text{۱} - \text{۸ لا}}{\text{۱} - \text{لا} - \text{۶ لا}^{\text{۲}}}$ کو اسکی جزوی کسور میں تحلیل کریں تو ہمیں

جزوی کسور $\frac{\text{۲}}{\text{۱} + \text{۲ لا}} - \frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{۳ لا}}$ حاصل ہوتی ہیں، جن سے

(ر + ۱) ویں رقم یا عام رقم $\{(-\text{۱})^{\text{ر}}\,\text{۲}^{\text{ر+۱}} - \text{۳}^{\text{ر}}\}\,\text{لا}^{\text{ر}}$ حاصل ہوتی ہے۔

ر کو بالترتیب ۰، ۱، ۲، ۳، ......، ن - ۱ کے مساوی رکھنے سے ن رقموں کا حاصل جمع

$$= \{\text{۲} - \text{۲}^{\text{۲}}\text{لا} + \text{۲}^{\text{۳}}\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۲}^{\text{۴}}\text{لا}^{\text{۳}} \ldots\ldots + (-\text{۱})^{\text{ن-۱}}\,\text{۲}^{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن-۱}}\}$$

$$-\left(۱+۳\,\text{لا}+۳^{۲}\,\text{لا}^{۲}+\ldots\ldots+۳^{\text{ن}-۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}\right)$$

$$=\frac{۲+(-۱)^{\text{ن}-۱}\,۲^{\text{ن}+۱}\,\text{لا}^{\text{ن}}}{۱+۲\,\text{لا}}-\frac{۱-۳^{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}}{۱-۳\,\text{لا}}$$

۳۲۹۔ اگر متوالی سلسلہ $\text{ا}_۰+\text{ا}_۱+\text{ا}_۲+\ldots\ldots$ کی عام رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرنا مقصود ہو تو اس کے لئے ہمیں $\text{ا}_۰+\text{ا}_۱\,\text{لا}+\text{ا}_۲\,\text{لا}^{۲}+\ldots\ldots$ کا حاصل جمع اور عام رقم معلوم کر لینی چاہئے، نتیجہ میں $\text{لا}=۱$ رکھنے سے مجموعہ مطلوبہ حاصل ہو گا۔

مثال۔ سلسلہ $۱+۶+۲۴+۸۴+\ldots\ldots$ کی عام رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

سلسلہ $۱+۶\,\text{لا}+۲۴\,\text{لا}^{۲}+۸۴\,\text{لا}^{۳}+\ldots\ldots$ کے ربط کا پیمانہ $۱-۵\,\text{لا}+۶\,\text{لا}^{۲}$ ہے اور تکوینی تفاعل $\dfrac{۱+\text{لا}}{۱-۵\,\text{لا}+۶\,\text{لا}^{۲}}$ ہے

یہ جملہ ذیل کی دو جزوی کسور میں تحلیل ہو سکتا ہے

$$\frac{۴}{۱-۳\,\text{لا}}-\frac{۳}{۱-۲\,\text{لا}}$$

اگر ان جملوں کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلایا جائے تو عام رقم $(۴\times۳^{\text{ر}}-۳\times۲^{\text{ر}})\,\text{لا}^{\text{ر}}$ حاصل ہوتی ہے، پس دیے ہوئے سلسلہ کی عام رقم $۴\times۳^{\text{ر}}-۳\times۲^{\text{ر}}$ ہے اور ن رقموں کا مجموعہ

$۲\,(۳^{\text{ن}}-۱)-۳\,(۲^{\text{ن}}-۱)$ ہے۔

۳۳۰۔ طالب علم کو ہم پھر یاد دلا دینا چاہتے ہیں کہ دفعۂ ماقبل کا تکوینی تفاعل سلسلہ

$$۱+۶\,\text{لا}+۲۴\,\text{لا}^{۲}+۸۴\,\text{لا}^{۳}+\ldots\ldots$$

کا حقیقی معادل تصور نہیں کیا جا سکتا سوائے اُس صورت کے جبکہ لا کی قیمت ایسی ہو کہ اس کے لئے سلسلۂ بالا مستدق ہو۔ پس اگر لا = ۱ تو چونکہ سلسلہ صریحاً متسع ہوتا ہے اس لئے تکوینی تفاعل سلسلہ بالا کا حقیقی معادل نہیں ہوگا۔ لیکن

۱ + ۶ + ۲۴ + ۸۴ + ...

کی عام رقم لا کے تابع نہیں اور لا کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو یہ عام رقم ہمیشہ سلسلہ

۱ + ۶ لا + ۲۴ لا^{۲} + ۸۴ لا^{۳} + ...

میں لا^{ن} کا سر ہوگی۔ اس لئے ہم اس کو مستدق سلسلہ سمجھ کر اس کی عام رقم حسب معمول معلوم کرتے ہیں اور پھر نتیجہ میں لا = ۱ رکھ دیتے ہیں۔

امثلہ نمبری ۲۴

ذیل کے سلسلہ کا تکوینی تفاعل اور عام رقم معلوم کرو

(۱) ۱ + ۵ لا + ۹ لا^{۲} + ۱۳ لا^{۳} + ...　(۲) ۲ - لا + ۵ لا^{۲} - ۷ لا^{۳} + ...

(۳) ۲ + ۳ لا + ۵ لا^{۲} + ۹ لا^{۳} + ...　(۴) ۷ - ۶ لا + ۹ لا^{۲} + ۲۷ لا^{۴} + ...

(۵) ۳ - ۶ لا + ۱۴ الا^{۲} - ۳۶ لا^{۳} + ۹۸ لا^{۴} - ۲۷۶ لا^{۵} + ...

ذیل کے سلسلوں میں سے ہر ایک کی ن ویں رقم اور ن رقموں کا مجموعہ معلوم کرو

(۶) ۲ + ۵ + ۱۳ + ۳۵ + ...　(۷) - ۱ + ۶ لا^{۲} + ۳۰ لا^{۳} + ...

(۸) ۲ + ۷ لا + ۲۵ لا^{۲} + ۹۱ لا^{۳} + ...

(۹) ۱ + ۲ لا + ۶ لا^{۲} + ۲۰ لا^{۳} + ۶۶ لا^{۴} + ۲۱۲ لا^{۵} + ...

(۱۰) - $\frac{۳}{۲}$ + ۲ + ۰ + ۸ + ۰.......

(۱۱) ثابت کرو کہ سلسلے

$$۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + ۴^{۲} + \ldots\ldots + \text{ن}^{۲}$$

$$\text{اور}\quad ۱^{۳} + ۲^{۳} + ۳^{۳} + ۴^{۳} + \ldots\ldots + \text{ن}^{۳}$$

متوالی سلسلے ہیں، ان کے ربط کا پیمانہ معلوم کرو۔

(۱۲) بتاؤ کہ اگر متوالی سلسلہ

$$\text{ا}_{۰} + \text{ا}_{۱}\,\text{لا} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{۲} + \text{ا}_{۳}\,\text{لا}^{۳} + \ldots\ldots$$

کی لامتناہی تعداد رقوم کا مجموعہ معلوم ہو تو اس سے اسکی ن رقموں کا حاصل جمع کس طرح نکالا جاسکتا ہے۔

(۱۳) سلسلہ

$$۳ - ۱ + ۱۳ - ۹ + ۴۱ - ۵۳ + \ldots\ldots$$

کی (۲ن + ۱) رقوم کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(۱۴) متوالی سلسلوں

$$\text{ا}_{۰} + \text{ا}_{۱}\,\text{لا} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{۲} + \text{ا}_{۳}\,\text{لا}^{۳} + \ldots\ldots$$

$$\text{اور}\quad \text{ب}_{۰} + \text{ب}_{۱}\,\text{لا} + \text{ب}_{۲}\,\text{لا}^{۲} + \text{ب}_{۳}\,\text{لا}^{۳} + \ldots\ldots$$

کے ربط کے پیمانے بالترتیب $۱ + \text{ق}\,\text{لا} + \text{ل}\,\text{لا}^{۲}$ اور $۱ + \text{ر}\,\text{لا} + \text{س}\,\text{لا}^{۲}$ ہیں، ثابت کرو کہ وہ سلسلہ جسکی عام رقم $(\text{ا}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}})\,\text{لا}^{\text{ن}}$ ہے ایک متوالی سلسلہ ہے جس کے ربط کا پیمانہ

$$۱ + (\text{ق} + \text{ر})\,\text{لا} + (\text{ل} + \text{س} + \text{ق}\,\text{ر})\,\text{لا}^{۲} + (\text{ل}\,\text{ر} + \text{ق}\,\text{س})\,\text{لا}^{۳}$$

$$+\ \text{ل}\,\text{س}\,\text{لا}^{۴}$$

ہے۔

(۱۵) اگر ایک ایسا سلسلہ بنایا جائے جس کی ن ویں رقم ایک

دوسرے دئے ہوئے متوالی سلسلہ کی ن رقموں کے مجموعہ کے برابر ہو تو بتاؤ کہ یہ سلسلہ بھی متوالی ہوگا جس کے ربط کے پیمانہ میں دئے ہوئے سلسلہ کے ربط کے پیمانہ کی نسبت ایک رقم زیادہ ہوگی۔



پچیسواں باب
کسور مسلسل

۳۳۱ ـ $ا + \frac{ب}{ج + \frac{د}{ع + \dots}}$ کی شکل کے جملہ کو کسر مسلسل کہتے ہیں، یہاں حروف ا، ب، ج، ...... وغیرہ کسی قسم کی مقادیر کو تعبیر کر سکتے ہیں لیکن فی الحال ہم صرف اسکی سادہ شکل $ا_1 + \frac{1}{ا_2 + \frac{1}{ا_3 + \frac{1}{\dots}}}$ پر بحث کرتے ہیں جس میں $ا_1$، $ا_2$، $ا_3$ ... صرف مثبت صحیح اعداد کو تعبیر کرتے ہیں، اس سلسلہ کو بالعموم زیادہ منضبط شکل $ا_1 + \frac{1}{ا_2 +} \frac{1}{ا_3 +}$ میں لکھا جاتا ہے۔

۳۳۲ ـ اگر خارج قسمتوں $ا_1$، $ا_2$، $ا_3$ ..... کی تعداد محدود ہو تو کسر مسلسل مختتم کہلاتی ہے اور اگر غیر محدود ہو تو کسر کو لامتناہی کسر مسلسل کہتے ہیں۔

اگر کسر مختتم ہو تو سلسلہ کی آخری یعنے سب سے نیچے کی رقم سے شروع ہو کر یکے بعد دیگرے کسور کو مختصر کرتے جانے سے

بالآخر ہم ایک مختتم کسر کو معمولی کسر کی شکل میں تحویل کر سکتے ہیں۔

۳۳۳۔ ایک مفروضہ کسر کو مسلسل کسر کی شکل میں لاؤ۔

فرض کرو کہ $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ ایک دی ہوئی کسر ہے، م کو ن پر تقسیم کرو اور فرض کرو کہ خارج قسمت ا_1 ہے اور باقی ق ہے، تب

$$\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \text{ا}_1 + \frac{\text{ق}}{\text{ن}} = \text{ا}_1 + \frac{1}{\frac{\text{ن}}{\text{ق}}}$$

پھر ن کو ق پر تقسیم کرو اور فرض کرو کہ ا_2 خارج قسمت ہے اور ق_1 باقی ہے، تب

$$\frac{\text{ن}}{\text{ق}} = \text{ا}_2 + \frac{\text{ق}_1}{\text{ق}} = \text{ا}_2 + \frac{1}{\frac{\text{ق}}{\text{ق}_1}}$$

پھر ق کو ق_1 پر تقسیم کرو اور فرض کرو کہ ا_3 خارج قسمت ہے اور ق_2 باقی ہے، اور علیٰ ہذا القیاس، تب

$$\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \text{ا}_1 + \frac{1}{\text{ا}_2 + \frac{1}{\text{ا}_3 + \dots}} = \text{ا}_1 + \frac{1}{\text{ا}_2 +} \frac{1}{\text{ا}_3 +} \dots\dots$$

اگر م کم ہو ن سے تو پہلا خارج قسمت صفر ہوتا ہے اور ہم اس طرح لکھتے ہیں $\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{1}{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$ اور حسب سابق عمل کرتے ہیں۔

یہ بات قابل غور ہے کہ مذکورہ بالا طریقہ وہی ہے جو م اور ن کا عاد اعظم نکالنے کا ہے، پس اگر م اور ن متوافق ہوں تو ظاہر ہے کہ ہم کبھی نہ کبھی ایک ایسی منزل پہ پہنچ جائینگے

جس پر تقسیم کا عمل پورا ہو جائیگا۔ اسلئے ظاہر ہے کہ ہم ہر ایسی کسر کو جس کا شمار کنندہ اور نسب نما دونوں مثبت صحیح اعداد ہوں ایک مختتم مسلسل کسر کی شکل میں لا سکتے ہیں۔

مثال۔ $\frac{251}{802}$ کو مسلسل کسر کی شکل میں لاؤ۔

معمولی قاعدہ کے مطابق ۲۵۱ اور ۸۰۲ کا عاد اعظم معلوم کرو۔

۵	۲۵۱	۸۰۲	۳
۶	۶	۴۹	۸
		۱	

اس میں خارج قسمت بالترتیب ۳، ۵، ۸، ۶ ..... ہیں، اسلئے

$$\frac{251}{802} = \frac{1}{3+}\;\frac{1}{5+}\;\frac{1}{8+}\;\frac{1}{6}$$

۳۳۴ ــ کسر مسلسل کے پہلے، دوسرے، تیسرے، ..... خارج قسمت پر ٹھہر جانے سے جو کسریں حاصل ہوتی ہیں ان کو بالترتیب پہلا، دوسرا، تیسرا، ..... **مستدق** کہتے ہیں، دفعہ ۳۳۹ میں معلوم ہوگا کہ یہ وجہ تسمیہ اس امر پر مبنی ہے کہ ہر مستدق کی قیمت اس سے پہلے مستدق کی نسبت مسلسل کسر کی اصلی قیمت کے زیادہ قریب ہوتی ہے۔

۳۳۵ ــ ثابت کرو کہ 'مستدق' مسلسل کسر کی اصلی قیمت سے متبادلاً کم اور زیادہ ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ مسلسل کسر $\text{ا}_1 + \frac{1}{\text{ا}_2+}\;\frac{1}{\text{ا}_3+}\;\dots\dots$ ہے

پہلا مستدق ا_1 ہے جو کسر بالا کی نسبت بہت چھوٹا ہے کیونکہ کسر کا باقی حصہ $\frac{1}{\text{ا}_2+}\;\frac{1}{\text{ا}_3+}\;\dots\dots$ چھوڑ دیا گیا ہے، دوسرا

مستدق $\text{ا}_1 + \frac{1}{\text{ا}_2}$ ہے جو کسر کی نسبت بڑا ہے کیونکہ نسب نما ا_2، اصلی نسب نما $\text{ا}_2 + \frac{1}{\text{ا}_3 + \dots}$ کی نسبت بہت چھوٹا ہے

اسی طرح تیسرا مستدق $\text{ا}_1 + \frac{1}{\text{ا}_2 +}\frac{1}{\text{ا}_3}$ مقابلتہً چھوٹا ہے

کیونکہ $\text{ا}_2 + \frac{1}{\text{ا}_3}$ مقابلتہً بڑا ہے اور علیٰ ہٰذالقیاس

اگر کسر مفروضہ کسر واجب ہو تو $\text{ا}_1 = 0$، اگر اس صورت میں ہم یہ تسلیم کر لیں کہ پہلا مستدق صفر ہے تو ہم نتائج بالا کو حسب ذیل الفاظ میں بیان کر سکتے ہیں

جفت رتبہ کے سب مستدق مسلسل کسر سے بڑے ہوتے ہیں

اور طاق رتبہ کے سب مستدق مسلسل کسر سے چھوٹے ہوتے ہیں۔

۳۳۶۔ متواتر مستدقوں کے بنانے کا کلیہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مسلسل کسر

$$\text{ا}_1 + \frac{1}{\text{ا}_2 +}\frac{1}{\text{ا}_3 +}\frac{1}{\dots}$$

ہے، تب پہلے تین مستدق، بالترتیب

$$\frac{\text{ا}_1}{1}،\quad \frac{\text{ا}_1\text{ا}_2 + 1}{\text{ا}_2}،\quad \frac{\text{ا}_3(\text{ا}_1\text{ا}_2 + 1) + \text{ا}_1}{\text{ا}_3\text{ا}_2 + 1}$$

ہیں، ہم دیکھتے ہیں کہ تیسرے مستدق کا شمار کنندہ دوسرے مستدق کے شمار کنندہ کو تیسرے خارج قسمت سے ضرب دیکر حاصل ضرب میں پہلا مستدق جمع کرنے سے بن جاتا ہے، اور اس کا نسب نما بھی اسی طرح بنتا ہے۔

فرض کرو کہ اسی طرح سے متواتر مستدق بنائے گئے ہیں، اور ان کے شمار کنندے بالترتیب $ق_{۱}$، $ق_{۲}$، $ق_{۳}$، ..... ہیں اور نسب نما $ل_{۱}$، $ل_{۲}$، $ل_{۳}$ .... ہیں۔

فرض کرو کہ کلیہ بالا ن ویں مستدق کے لئے صحیح ہے یعنی فرض کرو کہ

$$ق_{ن} = ا_{ن} ق_{ن-۱} + ق_{ن-۲}$$

$$\text{اور} \quad ل_{ن} = ا_{ن} ل_{ن-۱} + ل_{ن-۲}$$

(ن + ۱) ویں مستدق اور ن ویں مستدق میں فرق صرف اس قدر ہے کہ آخر الذکر کے خارج قسمت $ا_{ن}$ کی بجائے اول الذکر میں خارج قسمت $ا_{ن} + \frac{۱}{ا_{ن+۱}}$ ہے، پس (ن + ۱) واں مستدق

$$= \frac{\left(ا_{ن} + \frac{۱}{ا_{ن+۱}}\right) ق_{ن-۱} + ق_{ن-۲}}{\left(ا_{ن} + \frac{۱}{ا_{ن+۱}}\right) ل_{ن-۱} + ل_{ن-۲}}$$

$$= \frac{ا_{ن+۱} \left(ا_{ن} ق_{ن-۱} + ق_{ن-۲}\right) + ق_{ن-۱}}{ا_{ن+۱} \left(ا_{ن} ل_{ن-۱} + ل_{ن-۲}\right) + ل_{ن-۱}}$$

$$= \frac{ا_{ن+۱} ق_{ن} + ق_{ن-۱}}{ا_{ن+۱} ل_{ن} + ل_{ن-۱}} \quad \text{حسب مفروض}$$

اس لئے اگر ہم

$ق_{ن+۱} = ا_{ن+۱} ق_{ن} + ق_{ن-۱}$ ، $ل_{ن+۱} = ا_{ن+۱} ل_{ن} + ل_{ن-۱}$ رکھیں

تو ہم دیکھتے ہیں کہ (ن + ۱) ویں مستدق کا شمار کنندہ اور نسب نما اسی کلیہ کے موافق بنتا ہے جو ن ویں مستدق کی صورت میں درست تسلیم کیا گیا تھا۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ تیسرے مستدق کی صورت میں درست ہے، اس لئے یہ چوتھے مستدق کے لئے درست ہے اور علیٰ ہذا القیاس، پس یہ ہر حالت میں درست ہے۔

۳۳۷۔ $ا_{ن}$ کو ن ویں **جزوی خارج قسمت** کے نام سے موسوم کرنا زیادہ مناسب اور سہولت بخش ہو گا کیونکہ اس منزل پر **مکمل خارج قسمت** $ا_{ن} + \cfrac{۱}{ا_{ن+۱} +} \cfrac{۱}{ا_{ن+۲} +} \dots$ ہوتا ہے،

ہم بالعموم کسی منزل پر مکمل خارج قسمت کو ک سے تعبیر کرینگے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ $\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}} = \frac{ا_{ن} ق_{ن-۱} + ق_{ن-۲}}{ا_{ن} ل_{ن-۱} + ل_{ن-۲}}$

مسلسل کسر کو لا سے تعبیر کرو، تب لا، کسر $\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$ سے صرف اس بات کے لحاظ سے فرق رکھتا ہے کہ لا میں جزوی خارج قسمت $ا_{ن}$ کی بجائے مکمل خارج قسمت ک لیا گیا ہے۔

پس

$$لا = \frac{ک\, ق_{ن-۱} + ق_{ن-۲}}{ک\, ل_{ن-۱} + ل_{ن-۲}}$$

۳۳۸ - اگر $\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$ کسی مسلسل کسر کا نواں مستدق ہو تو

$$ق_{ن}\, ل_{ن-۱} - ق_{ن-۱}\, ل_{ن} = (-۱)^{ن}$$

فرض کرو کہ مسلسل کسر

$$ا_{۱} + \frac{۱}{ا_{۲} +}\; \frac{۱}{ا_{۳} +}\; \frac{۱}{ا_{۴} +}$$

ہے، تب

$$ق_{ن}\, ل_{ن-۱} - ق_{ن-۱}\, ل_{ن} = (ا_{ن}\, ق_{ن-۱} + ق_{ن-۲})\, ل_{ن-۱}$$
$$- ق_{ن-۱}\, (ا_{ن}\, ل_{ن-۱} + ل_{ن-۲})$$
$$= (-۱)\, (ق_{ن-۱}\, ل_{ن-۲} - ق_{ن-۲}\, ل_{ن-۱})$$
$$= (-۱)^{۲}\, (ق_{ن-۲}\, ل_{ن-۳} - ق_{ن-۳}\, ل_{ن-۲})$$ اس طرح سے
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= (-۱)^{ن-۲}\, (ق_{۲}\, ل_{۱} - ق_{۱}\, ل_{۲})$$

لیکن $ق_{۲}\, ل_{۱} - ق_{۱}\, ل_{۲} = (ا_{۱} ا_{۲} + ۱) - ا_{۱} ا_{۲} = ۱ = (-۱)^{۲}$

پس $ق_{ن}\, ل_{ن-۱} - ق_{ن-۱}\, ل_{ن} = (-۱)^{ن}$

جب مسلسل کسر ایک سے کم ہو تو یہ نتیجہ درست رہتا ہے اگر ہم $ا_۱ = ۰$ فرض کریں، اور پہلا مستدق بھی صفر ہو۔

نوٹ۔ جب ہم متواتر مستدقوں کی عددی قیمتیں نکال رہے ہوں تو متذکرہ بالا مسئلہ عمل کی صحت کی جانچ کرنے کا ایک سادہ اور آسان ذریعہ ہے۔

نتیجہ صریح ۱۔ ہر ایک مستدق مفرد ترین شکل میں ہوتا ہے کیونکہ اگر $ق_ن$ اور $ل_ن$ میں کوئی جزوِ ضربی مشترک ہو تو یہ $ق_ن ل_{ن-۱} - ق_{ن-۱} ل_ن$ یعنی ۱ کو پورا تقسیم کریگا جو صریحاً ناممکن ہے۔

نتیجہ صریح ۲۔ دو متواتر مستدقوں کا فرق ایک کسر ہوتی ہے جس کا شمار کنندہ ۱ ہوتا ہے، کیونکہ

$$\frac{ق_ن}{ل_ن} - \frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}} = \frac{ق_ن ل_{ن-۱} - ق_{ن-۱} ل_ن}{ل_ن ل_{ن-۱}} = \frac{۱}{ل_ن ل_{ن-۱}}$$

امثلہ نمبری ۲۵ (ا)

ذیل کے سلسلوں کے متواتر مستدق معلوم کرو۔

۱ - $۲ + \frac{۱}{۶+} \frac{۱}{۱+} \frac{۱}{۱+} \frac{۱}{۱۱+} \frac{۱}{۲}$

۲ - $\frac{۱}{۲+} \frac{۱}{۲+} \frac{۱}{۳+} \frac{۱}{۱+} \frac{۱}{۴+} \frac{۱}{۲+} \frac{۱}{۶}$

۳ - $۳ + \frac{۱}{۳+} \frac{۱}{۱+} + \frac{۱}{۲+} \frac{۱}{۲+} \frac{۱}{۱+} \frac{۱}{۹}$

ذیل کی مقداروں کو مسلسل کسور کی شکل میں لاؤ اور ہر ایک کا چوتھا متدق معلوم کرو۔

۴- $\frac{۲۵۳}{۱۷۹}$ ۵- $\frac{۸۳۲}{۱۵۹}$ ۶- $\frac{۱۱۸۹}{۳۹۲۷}$

۷- $\frac{۷۲۹}{۲۳۱۸}$ ۸- ۳۷،   ۹- ۱،۱۳۹

۱۰- ۳۰۲۹،   ۱۱- ۴،۳۱۶

۱۲- ایک میٹر ۳۹،۳۷۰۷۹ انچ کے مساوی ہوتا ہے، مسلسل کسور کے نظریہ سے ثابت کرو کہ ۳۲ میٹر تقریباً ۳۵ گز کے مساوی ہونگے۔

۱۳- کسروں کا ایک ایسا سلسلہ معلوم کرو جو ۲۴۲۲۶، کی جانب متدق ہو، یہ کسر اعشاریہ ۳۶۵ دنوں پر شمسی سال کی زیادتی کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۴- ایک کلومیٹر تقریباً ۶۲۱۳۸، میل کے مساوی ہوتا ہے، ثابت کرو کہ کسور $\frac{۵}{۸}$، $\frac{۱۸}{۲۹}$، $\frac{۲۳}{۳۷}$، $\frac{۶۴}{۱۰۳}$ اُس نسبت کی جو ایک کلومیٹر کو ایک میل کے ساتھ ہے متواتر متدق قیمتیں ہیں۔

۱۵- مساوی طول کی دو پٹریاں بالترتیب ۱۶۲ اور ۲۰۹ برابر حصوں میں تقسیم کی گئی ہیں اگر اُن کے صفر کے نشان ایک دوسرے پر منطبق ہوں تو بتاؤ کہ ایک کا ۳۱ واں نشان دوسرے کے ۴۰ ویں نشان پر تقریباً منطبق ہوگا۔

۱۶- اگر $\frac{ن^۴ + ن^۲ - ۱}{ن^۳ + ن^۲ + ن + ۱}$ کو مسلسل کسر میں تبدیل کیا جائے تو ثابت کرو کہ خارج قسمت متبادلاً ن - ۱ اور ن + ۱ ہونگے، نیز متواتر متدق معلوم کرو۔

۱۷- ثابت کرو کہ

$$(۱)\qquad \frac{ق_{ن+۱}-ق_{ن-۱}}{ل_{ن+۱}-ل_{ن-۱}}=\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$$

$$(۲)\qquad \left(\frac{ق_{ن+۲}}{ق_{ن}}-۱\right)\left(۱-\frac{ق_{ن-۱}}{ق_{ن+۱}}\right)=\left(\frac{ل_{ن+۲}}{ل_{ن}}-۱\right)\left(۱-\frac{ل_{ن-۱}}{ل_{ن+۱}}\right)$$

۱۸- اگر $\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$ ایک مسلسل کسر کا ن واں مستدق ہو اور اسکا متناظر خارج قسمت $ا_{ن}$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$ق_{ن+۲}\,ل_{ن-۲}-ق_{ن-۲}\,ل_{ن+۲}=ا_{ن+۲}\times ا_{ن+۱}\times ا_{ن}+ا_{ن+۲}+ا_{ن}$$

۳۳۹- ہر مستدق اپنے پہلے کے مستدق کی نسبت مسلسل کسر کی قیمت کے مقابلتہً زیادہ قریب ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مسلسل کسر لا ہے اور اس کے تین متواتر مستدق $\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$ ، $\frac{ق_{ن+۱}}{ل_{ن+۱}}$ ، $\frac{ق_{ن+۲}}{ل_{ن+۲}}$ ہیں، اب لا اور کسر $\frac{ق_{ن+۲}}{ل_{ن+۲}}$ میں فرق صرف اس قدر ہے کہ لا میں $ا_{ن+۲}$ کی بجائے (ن+۲) واں پورا خارج قسمت لیا گیا ہے، اس پورے خارج قسمت کو ک سے تعبیر کرو، تب

$$لا=\frac{ک\,ق_{ن+۱}+ق_{ن}}{ک\,ل_{ن+۱}+ل_{ن}}$$

$$\therefore\ \text{لا} - \frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}} = \frac{\text{ک}\left(\text{ق}_{\text{ن}+۱}\,\text{ل}_{\text{ن}} - \text{ق}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}+۱}\right)}{\text{ل}_{\text{ن}}\left(\text{ک}\,\text{ل}_{\text{ن}+۱} + \text{ل}_{\text{ن}}\right)} = \frac{\text{ک}}{\text{ل}_{\text{ن}}\left(\text{ک}\,\text{ل}_{\text{ن}+۱} + \text{ل}_{\text{ن}}\right)}$$

اور

$$\frac{\text{ق}_{\text{ن}+۱}}{\text{ل}_{\text{ن}+۱}} - \text{لا} = \frac{\text{ق}_{\text{ن}+۱}\,\text{ل}_{\text{ن}} - \text{ق}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}+۱}}{\text{ل}_{\text{ن}+۱}\left(\text{ک}\,\text{ل}_{\text{ن}+۱} + \text{ل}_{\text{ن}}\right)} = \frac{۱}{\text{ل}_{\text{ن}+۱}\left(\text{ک}\,\text{ل}_{\text{ن}+۱} + \text{ل}_{\text{ن}}\right)}$$

اب ک ایک سے بڑا ہے اور $\text{ل}_{\text{ن}}$ چھوٹا ہے $\text{ل}_{\text{ن}+۱}$ سے، اسلئے اِن دونوں وجوہات کی بناء پر $\frac{\text{ق}_{\text{ن}+۱}}{\text{ل}_{\text{ن}+۱}}$ اور لا کا فرق چھوٹا ہے $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ اور لا کے فرق سے، اس سے ثابت ہوا کہ کسی مسلسل کسر کا ہر ایک مستدق اپنے عین پہلے مستدق کی نسبت اور بنا بریں پہلے مستدقوں میں سے ہر ایک کی نسبت کسر مذکور کی قیمت سے زیادہ قریب ہوتا ہے۔ دفعۂ ہذا کے نتیجہ کو دفعہ ۳۳۵ کے نتیجہ کے ساتھ ملانے سے یہ ظاہر ہے کہ

طاق رتبہ کے مستدق قیمت میں بالتسلسل بڑھتے جاتے ہیں لیکن کسر کی قیمت سے کبھی تجاوز نہیں کر سکتے۔

جفت رتبہ کے مستدق قیمت میں بالتسلسل کم ہوتے جاتے ہیں لیکن مسلسل کسر کی قیمت سے کبھی کم نہیں ہوتے۔

۳۴۰ ـ کسی مستدق کو مسلسل کسر کے مساوی لینے سے جو غلطی واقع ہوتی ہے اسکی حدود معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ ، $\frac{\text{ق}_{\text{ن}+۱}}{\text{ل}_{\text{ن}+۱}}$ ، $\frac{\text{ق}_{\text{ن}+۲}}{\text{ل}_{\text{ن}+۲}}$ تین مسلسل مستدق

ہیں اور ک پورے (ن + ۲) ویں خارج قسمت کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\text{تب لا} = \frac{\text{ک}\ \text{ق}_{\text{ن}+1} + \text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ک}\ \text{ل}_{\text{ن}+1} + \text{ل}_{\text{ن}}}$$

$$\therefore \text{لا} \sim \frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}} = \frac{\text{ک}}{\text{ل}_{\text{ن}}(\text{ک}\ \text{ل}_{\text{ن}+1} + \text{ل}_{\text{ن}})} = \frac{1}{\text{ل}_{\text{ن}}\left(\text{ل}_{\text{ن}+1} + \frac{\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ک}}\right)}$$

اب ک ایک سے بڑا ہے، اس لئے $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ اور لا کا فرق

$\frac{1}{\text{ل}_{\text{ن}}\ \text{ل}_{\text{ن}+1}}$ سے کم ہے اور $\frac{1}{\text{ل}_{\text{ن}}(\text{ل}_{\text{ن}+1} + \text{ل}_{\text{ن}})}$ سے بڑا ہے

نیز چونکہ $\text{ل}_{\text{ن}+1} > \text{ل}_{\text{ن}}$ اس لئے $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ کو لا کی بجائے لینے سے جو غلطی واقع ہوتی ہے وہ $\frac{1}{\text{ل}_{\text{ن}}^2}$ سے کم ہے اور $\frac{1}{2\ \text{ل}_{\text{ن}+1}^2}$ سے زیادہ ہے۔

۱۴۳۔ دفعہ ماقبل سے یہ ظاہر ہے کہ $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ کو مسلسل کسر کی بجائے لینے سے جو غلطی واقع ہوتی ہے وہ $\frac{1}{\text{ل}_{\text{ن}}\ \text{ل}_{\text{ن}+1}}$ یا

$\frac{1}{ل_ن(ا_{ن+1}ل_ن + ل_{ن-1})}$ سے کم ہے یعنی $\frac{1}{ا_{ن+1}ل_ن^2}$ سے کم

ہے، پس $ا_{ن+1}$ جتنا بڑا ہوگا اتنا ہی $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ کی قیمت مسلسل کسر کی قیمت کے زیادہ قریب ہوگی۔

پس کسی بڑے خارج قسمت کے عین پہلے کا مستدق مسلسل کسر کی قیمت کے بہت قریب ہوتا ہے۔

اب چونکہ غلطی $\frac{1}{ل_ن^2}$ سے کم ہے اس لئے ایک ایسا مستدق معلوم کرنے کے لئے جس کی قیمت اور مسلسل کسر کی قیمت کا باہمی فرق ایک معلومہ مقدار $\frac{1}{ا}$ سے کم ہو ہمیں $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ تک متواتر مستدق نکالنے چاہئیں جہاں $ق_ن^2$ بڑا ہے ا سے۔

۳۴۲۔ مسلسل کسروں کے خواص کی مدد سے ہم دو ایسے چھوٹے صحیح اعداد معلوم کر سکتے ہیں جن کی نسبت دو متبائن مقادیر کی نسبت کے بہت قریب ہو یا دو ایسی مقادیر کی باہمی نسبت کے بہت قریب ہو جنکی ٹھیک نسبت صرف دو بڑے صحیح عددوں سے تعبیر ہوسکتی ہو۔

مثال۔ کسور کا ایک ایسا سلسلہ معلوم کرو جو عدد ۳٫۱۴۱۵۹ کی طرف مستدق ہو۔ ۱۴۱۵۹ اور ۱۰۰۰۰ کا عاد اعظم نکالنے کے عمل میں متواتر خارج قسمت ۷، ۱۵، ۱، ۲۵، ۱، ۷، ۴ ہیں، تب

$$۳٫۱۴۱۵۹ = ۳ + \frac{۱}{+۷}\;\frac{۱}{+۱۵}\;\frac{۱}{+۱}\;\frac{۱}{+۲۵}\;\frac{۱}{+۱}\;\frac{۱}{+۷}\;\frac{۱}{۴}$$

پس متواتر مستدق

$$\frac{۳}{۱}،\;\frac{۲۲}{۷}،\;\frac{۳۳۳}{۱۰۶}،\;\frac{۳۵۵}{۱۱۳}،\;......$$

ہیں، آخر کا مستدق جو کہ بڑے خارج قسمت ۲۵ سے پہلے ہے کسر کی قیمت کے نہایت قریب ہے، اس مستدق اور کسر کی قیمت میں اختلاف $\frac{۱}{۲۵\times(۱۱۳)^{۲}}$ سے کم ہے اور اس لئے $\frac{۱}{۲۵\times(۱۰۰)^{۲}}$ سے یعنی ٫۰۰۰۰۰۴ سے کم ہے۔

۳۴۳۔ کوئی مستدق کسی ایسی کسر کی نسبت جس کا نسب نما مستدق کے نسب نما سے کم ہو مسلسل کسر کی قیمت کے زیادہ قریب ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مسلسل کسر لا ہے، $\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$ اور $\frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}}$ دو متصل مستدق ہیں اور $\frac{ر}{س}$ ایک ایسی کسر ہے جس کا نسب نما س، $ل_{ن}$ سے کم ہے۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ کسر $\frac{ر}{س}$ مستدق $\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$ کی نسبت لا کے زیادہ قریب ہے تب دفعہ ۳۳۹ کی رو سے $\frac{ر}{س}$ مستدق $\frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}}$ کی نسبت بھی لا کے زیادہ قریب ہوگا۔

اور چونکہ لا، $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ اور $\frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}}$ کے درمیان واقع ہے اسلئے

لازماً $\frac{ر}{س}$ کو $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ اور $\frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}}$ کے درمیان واقع ہونا چاہئے۔

اسلئے $\frac{ر}{س} \sim \frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}} < \frac{ق_ن}{ل_ن} \sim \frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}}$ یعنی $< \frac{۱}{ل_ن ل_{ن-۱}}$

$$\therefore ر ل_{ن-۱} \sim س ق_{ن-۱} < \frac{س}{ل_ن}$$

یعنی ایک صحیح عدد ایک کسر سے کم ہے جو صریحاً ناممکن ہے

لہذا $\frac{ق_ن}{ل_ن}$، کسر $\frac{ر}{س}$ کی نسبت مسلسل کسر کے زیادہ قریب ہوگا۔

۴۴۳۔ اگر $\frac{ق}{ل}$ اور $\frac{ق'}{ل'}$ کسی مسلسل کسر لا کے دو متواتر مستدق ہوں تو $\frac{ق ق'}{ل ل'}$ بڑا ہوگا $لا^۲$ سے جب $\frac{ق}{ل}$ بڑا ہو $\frac{ق'}{ل'}$ سے اور $\frac{ق ق'}{ل ل'}$ چھوٹا ہوگا $لا^۲$ سے جب $\frac{ق}{ل}$ چھوٹا ہو $\frac{ق'}{ل'}$ سے۔

فرض کرو کہ $\frac{ق'}{ل'}$ کے عین بعد جو مستدق ہے اس کے

جواب میں مکمل خارج قسمت ک ہے، تب $\text{لا} = \frac{\text{ک قَ + ق}}{\text{ک لَ + ل}}$

$$\therefore \frac{\text{ق قَ}}{\text{ل لَ}} - \text{لا}^2 = \frac{1}{\text{ل لَ (ک لَ + ل)}^2}\left\{\text{ق قَ (ک لَ + ل)}^2 - \text{ل لَ (ک قَ + ق)}^2\right\}$$

$$= \frac{(\text{ک}^2\ \text{قَ لَ - ق ل})(\text{ق لَ - قَ ل})}{\text{ل لَ (ک لَ + ل)}^2}$$

جزو ضربی $\text{ک}^2\ \text{قَ لَ - ق ل}$ مثبت ہے کیونکہ قَ > ق، لَ > ل اور ک > ۱ اسلئے $\frac{\text{ق قَ}}{\text{ل لَ}} >$ یا $< \text{لا}^2$ یعنی اگر بالترتیب ق لَ - قَ ل مثبت ہو یا منفی ہو یعنی اگر بالترتیب $\frac{\text{ق}}{\text{ل}} >$ یا $< \frac{\text{قَ}}{\text{لَ}}$

نتیجہ صریح۔ اوپر کی تحقیقات سے ظاہر ہے کہ جملات ق لَ - قَ ل، ق قَ - ل لَ لا^2، $\text{قَ}^2 - \text{لَ}^2\ \text{لا}^2$، $\text{ل}^2\ \text{لا}^2 - \text{ق}^2$ کی علامت ایک ہی ہوگی۔

امثلہ نمبری ۲۵ (ب)

(۱) $\frac{222}{203}$ گزوں کو ایک میٹر کا معادل لینے میں جو غلطی ہوگی اس کی حدود دریافت کرو، معلوم ہے کہ ایک میٹر = ۱،۰۹۳۶ گز

(۲) سلسلہ $1 + \frac{1}{3+}\ \frac{1}{5+}\ \frac{1}{7+}\ \frac{1}{9+}\ \frac{1}{11+}$ ...... کی ایسی تقریبی قیمت معلوم کرو جس میں اور سلسلہ بالا کی اصلی قیمت میں اختلاف ۰۰۰۰۱، سے کم ہو۔

(۳) مسلسل سلسلوں کے نظریہ کی رو سے ثابت کرو کہ $\frac{99}{70}$

اور ۱۲۱۴۱۴ء۱ کا فرق $\frac{۱}{۱۱۸۳۰}$ سے کم ہے۔

(۴) $\frac{\text{ا}^{۳} + ۶\,\text{ا}^{۲} + ۱۳\,\text{ا} + ۱۰}{\text{ا}^{۴} + ۶\,\text{ا}^{۳} + ۱۴\,\text{ا}^{۲} + ۱۵\,\text{ا} + ۷}$

کو کسر مسلسل کی شکل میں لاؤ اور تیسرا متدق معلوم کرو۔

(۵) ثابت کروکہ پہلے اور ن ویں متدق کا فرق تعداداً

$$\frac{۱}{\text{ل}_{۱}\text{ل}_{۲}} - \frac{۱}{\text{ل}_{۲}\text{ل}_{۳}} + \frac{۱}{\text{ل}_{۳}\text{ل}_{۴}} - \dots + \frac{(-۱)^{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}-۱}\text{ل}_{\text{ن}}}$$

سے مساوی ہے۔

(۶) ثابت کروکہ اگر متدق $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ کے جواب میں خارج قسمت $\text{ا}_{\text{ن}}$ ہو تو

(۱) $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}-۱}} = \text{ا}_{\text{ن}} + \frac{۱}{\text{ا}_{\text{ن}-۱}+}\ \frac{۱}{\text{ا}_{\text{ن}-۲}+}\ \frac{۱}{\text{ا}_{\text{ن}-۳}+} \dots + \frac{۱}{\text{ا}_{۳}+}\ \frac{۱}{\text{ا}_{۲}+}\ \frac{۱}{\text{ا}_{۱}}$

(۲) $\frac{\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}-۱}} = \text{ا}_{\text{ن}} + \frac{۱}{\text{ا}_{\text{ن}-۱}+}\ \frac{۱}{\text{ا}_{\text{ن}-۲}+}\ \frac{۱}{\text{ا}_{\text{ن}-۳}+} \dots \frac{۱}{\text{ا}_{۳}+}\ \frac{۱}{\text{ا}_{۲}}$

(۷) مسلسل کسر $\frac{۱}{\text{ا}+}\ \frac{۱}{\text{ا}+}\ \frac{۱}{\text{ا}+}\ \frac{۱}{\text{ا}+} \dots$ میں ثابت کروکہ

(۱) $\text{ق}_{\text{ن}}^{۲} + \text{ق}_{\text{ن}+۱}^{۲} = \text{ق}_{\text{ن}-۱}\,\text{ق}_{\text{ن}+۱} + \text{ق}_{\text{ن}}\,\text{ق}_{\text{ن}+۲}$

(۲) $\text{ق}_{\text{ن}} = \text{ل}_{\text{ن}-۱}$

۸- اگر $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ مسلسل کسر

$$\frac{۱}{ا+}\ \frac{۱}{ب+}\ \frac{۱}{ا+}\ \frac{۱}{ب+}\ \frac{۱}{ا+}\ \dots\dots$$

کا ن واں متدق ہو تو ثابت کرو کہ

$$ل_{۲ن} = ق_{۲ن+۱} \quad \text{اور} \quad ل_{۲ن-۱} = \frac{ا}{ب}\, ق_{۲ن}$$

۹- مسلسل کسر

$$\frac{۱}{ا+}\ \frac{۱}{ب+}\ \frac{۱}{ا+}\ \frac{۱}{ب+}$$

میں ثابت کرو کہ $ق_{ن+۲} - (اب+۲)\, ق_{ن} + ق_{ن-۲} = ۰$

اور $ل_{ن+۲} - (اب+۲)\, ل_{ن} + ل_{ن-۲} = ۰$

۱۰- ثابت کرو کہ

$$ا\left(لا_{۱} + \frac{۱}{الا_{۲}+}\ \frac{۱}{لا_{۳}+}\ \frac{۱}{الا_{۴}}\ \dots\dots\ \text{۲ن خارج قسمتوں تک}\right)$$

$$= الا_{۱} + \frac{۱}{لا_{۲}+}\ \frac{۱}{الا_{۳}+}\ \frac{۱}{لا_{۴}+}\ \dots\dots\ \text{۲ن خارج قسمتوں تک}$$

۱۱- اگر مسلسل کسور $\frac{۱}{ا_{۱}+}\ \frac{۱}{ا_{۲}+}\ \frac{۱}{ا_{۳}+} \dots$، $\frac{۱}{ا_{۲}+}\ \frac{۱}{ا_{۳}+}\ \frac{۱}{ا_{۴}+} \dots$، $\frac{۱}{ا_{۳}+}\ \frac{۱}{ا_{۴}+}\ \frac{۱}{ا_{۵}+}$ میں سے پہلی کا ع واں، دوسری کا (ع-۱) واں، تیسری کا (ع-۲) واں متدق بالترتیب $\frac{م}{ن}$، $\frac{ق}{ل}$، $\frac{ر}{س}$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$م = ا_{۲}ق + ر،\quad ن = (ا_{۱}ا_{۲}+۱)\, ل + ا_{۱}ر$$

۱۲- اگر سلسلہ

$$\frac{1}{\text{ا}+}\ \frac{1}{\text{ا}+}\ \frac{1}{\text{ا}+}\cdots$$

کا ن واں متدق $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ ہو تو ثابت کروکہ $\text{ق}_{\text{ن}}$ اور $\text{ل}_{\text{ن}}$ بالترتیب

$$\frac{\text{لا}}{1-\text{الا}-\text{لا}^2} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{الا}+\text{لا}^2}{1-\text{الا}-\text{لا}^2}$$

کی تفصیلوں میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کے سر ہیں - اس سے ثابت کروکہ

$$\text{ق}_{\text{ن}} = \text{ل}_{\text{ن}-1} = \frac{\text{عہ}^{\text{ن}} - \text{بہ}^{\text{ن}}}{\text{عہ} - \text{بہ}}$$ جہاں عہ اور بہ مساوات

$\text{ت}^2 - \text{ات} - 1 = 0$ کی اصلیں ہیں -

۱۳- اگر کسر مسلسل

$$\frac{1}{\text{ا}+}\ \frac{1}{\text{ب}+}\ \frac{1}{\text{ا}+}\ \frac{1}{\text{ب}}\cdots$$

کا ن واں متدق $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ ہو تو ثابت کروکہ $\text{ق}_{\text{ن}}$ اور $\text{ل}_{\text{ن}}$ بالترتیب

$$\frac{\text{لا}+\text{ب}\,\text{لا}^2-\text{لا}^3}{1-(\text{اب}+2)\text{لا}^2+\text{لا}^4} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{الا}+(\text{اب}+1)\text{لا}^2-\text{لا}^4}{1-(\text{اب}+2)\text{لا}^2+\text{لا}^4}$$

کی تفصیلوں میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کے سر ہیں، اس سے ثابت کروکہ

$$\text{ا}\,\text{ق}_{2\text{ن}} = \text{ب}\,\text{ل}_{2\text{ن}-1} = \text{اب}\,\frac{\text{عہ}^{\text{ن}} - \text{بہ}^{\text{ن}}}{\text{عہ} - \text{بہ}}$$

$$\text{ق}_{2\text{ن}+1} = \text{ل}_{2\text{ن}} = \frac{\text{عہ}^{\text{ن}+1} - \text{بہ}^{\text{ن}+1} + \text{ا}(\text{عہ}^{\text{ن}} - \text{بہ}^{\text{ن}})}{\text{عہ} - \text{بہ}}$$

جہاں عہ اور بہ مساوات

$$۱ - (اب + ۲) لا^{۲} + لا^{۴} = ۰$$

میں $لا^{۲}$ کی قیمتیں ہیں -



چھبیسواں باب

درجۂ اول کی غیر معین مساواتیں

۳۴۵ - دسویں باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کس طرح عددی سروں والی غیر معیّن مساواتوں کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم ہو سکتے ہیں۔ یہاں ہم درجۂ اول کی کسی غیر معیّن مساوات کے عام حل حاصل کرنے کے لئے مسلسل کسروں کے خواص کو کام میں لائیں گے۔

۳۴۶ - ہم درجۂ اول کی کسی مساوات کو جس میں دو مجہول لا اور ما شامل ہوں ا لا ± ب ما = ± ج کی شکل میں تحویل کر سکتے ہیں یہاں ا، ب، ج مثبت صحیح اعداد کو تعبیر کرتے ہیں۔ اس مساوات کے بے شمار حل ہو سکتے ہیں لیکن اگر سوال کی شرائط کی رُو سے لا، ما مثبت صحیح اعداد ہوں تو ممکن ہے کہ حلّوں کی تعداد محدود ہو۔

یہ ظاہر ہے کہ مساوات ا لا + ب ما = - ج کا کوئی حل مثبت صحیح عدد نہیں ہو سکتا، نیز مساوات ا لا - ب ما = - ج وہی ہے جو مساوات ب ما - ا لا = ج ہے، اس لئے صرف مساوات ا لا ± ب ما = ج پر بحث کرنا کافی ہوگا۔

اگر ا اور ب میں کوئی جزوِ ضربی م ہو اور ج میں یہ جزوِ ضربی شامل نہ ہو تو مساوات ا لا ± ب ما = ج میں سے کوئی

بھی لا، ما کی صحیح عددی قیمت سے پوری نہیں ہوتی کیونکہ ا لا ± ب ما، م پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے لیکن ج پورا تقسیم نہیں ہوتا۔

اگر ا، ب، ج میں کوئی جزو ضربی مشترک ہو تو تقسیم کرنے سے اسے نکال دیا جا سکتا ہے، پس ہم یہ فرض کرینگے کہ ا، ب، ج میں کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہے اور ا اور ب ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں۔

۴۴۳۔ مساوات ا لا ۔ ب ما = ج کا عام حل مثبت صحیح اعداد میں دریافت کرو۔

$\frac{ا}{ب}$ کو مسلسل کسر کی شکل میں تحویل کرو اور $\frac{ا}{ب}$ کے عین پہلے مستدق کو $\frac{ق}{ل}$ سے تعبیر کرو، تب ا ل ۔ ب ق = ± ۱

[دفعہ ۳۳۸]

ا۔ اگر ا ل ۔ ب ق = ۱ تو مساوات بالا کو ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

ا لا ۔ ب ما = ج (ا ل ۔ ب ق)

∴ ا (لا ۔ ج ل) = ب (ما ۔ ج ق)

اب چونکہ ا اور ب میں کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہے اس لئے لا ۔ ج ل، ب پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے، پس لا ۔ ج ل = ب د جہاں د کوئی صحیح عدد ہے

$$\therefore \frac{\text{لا ۔ ج ل}}{\text{ب}} = \text{د} = \frac{\text{ما ۔ ج ق}}{\text{ا}}$$

یعنی لا = ب د + ج ل، ما = ا د + ج ق

جس سے د کو مثبت صحیح عددی قیمتیں دینے سے یا کوئی ایسی منفی صحیح عددی قیمتیں دینے سے جو تعداداً مقادیر

$\frac{ج ل}{ب}$ اور $\frac{ج ق}{ا}$ میں سے چھوٹی مقدار سے کم ہوں مطلوبہ صحیح عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں، نیز د صفر کے مساوی ہو سکتا ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ حلوں کی تعداد غیر محدود ہے۔

۲۔ اگر ا ل ـ ب ق = ـ ۱ تو

ا لا ـ ب ما = ـ ج (ا ل ـ ب ق)

∴ ا (لا + ج ل) = ب (ما + ج ق)

∴ $\frac{لا + ج ل}{ب} = \frac{ما + ج ق}{ا}$ = د ..... کوئی صحیح عدد

اس لئے لا = ب د ـ ج ل، ما = ا د ـ ج ق

ان مساواتوں میں د کو کوئی ایسی مثبت صحیح عددی قیمت دینے سے جو مقادیر $\frac{ج ل}{ب}$ اور $\frac{ج ق}{ا}$ میں سے بڑی مقدار سے زیادہ ہو مطلوبہ عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں، پس اس صورت میں بھی حلوں کی تعداد غیر محدود ہے۔

۳۔ اگر ا اور ب میں سے کوئی ایک، ۱ کے مساوی ہو تو کسر $\frac{ا}{ب}$ کو ایسی مسلسل کسر کی صورت میں تحویل نہیں کیا جا سکتا جس میں شمار کنندگان '۱' ہوں اس لئے آگے عمل نہیں کیا جا سکتا تاہم ان صورتوں میں حل محض دیکھنے سے معلوم ہو سکتے ہیں، مثلاً اگر ب = ۱ تو مساوات ہو جاتی ہے ا لا ـ ما = ج جس سے ما = ا لا ـ ج، اس میں لا کو $\frac{ج}{ا}$ سے بڑی کوئی مثبت صحیح عددی قیمت دینے سے مطلوبہ حل حاصل ہو سکتے ہیں۔

نوٹ۔ دیکھنے سے معلوم ہو گا کہ لا اور ما کی قیمتوں کے سلسلے

دو حسابی سلسلے ہیں جن میں مشترک فرق بالترتیب ب اور ا ہیں۔

مثال۔ مساوات ۲۹ لا - ۴۲ ما = ۵ کا عام حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو۔

۴۲/۲۹ کو مسلسل کسر میں تحویل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ۴۲/۲۹ کے عین پہلے کا مستدق ۱۳/۹ ہے، پس

۲۹ × ۱۳ - ۴۲ × ۹ = -۱

∴ ۲۹ × ۶۵ - ۴۲ × ۴۵ = -۵

اس کو اصلی مساوات کے ساتھ ملانے سے

۲۹ (لا + ۶۵) = ۴۲ (ما + ۴۵)

∴ (لا + ۶۵)/۴۲ = (ما + ۴۵)/۲۹ = د ایک صحیح عدد

پس عام حل ہوا

لا = ۴۲ د - ۶۵، ما = ۲۹ د - ۴۵

۳۴۸۔ اگر مساوات ا لا - ب ما = ج کا ایک حل مثبت صحیح اعداد میں دیا ہوا ہو تو عام حل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ھ، ک مساوات ا لا - ب ما = ج کا ایک حل ہے، تب ا ھ - ب ک = ج

∴ ا لا - ب ما = ا ھ - ب ک

∴ ا (لا - ھ) = ب (ما - ک)

∴ (لا - ھ)/ب = (ما - ک)/ا = د، کوئی صحیح عدد

لہٰذا لا = ھ + ب د، ما = ک + ا د جو عام حل ہے۔

۳۴۹۔ مساوات ا لا + ب ما = ج کا عام حل مثبت صحیح

اعداد ہیں معلوم کرو۔

ا/ب کو مسلسل کسر میں تحویل کرو اور فرض کرو کہ ا/ب کے عین پہلے کا مستدق ق/ل ہے، تب

ا ل - ب ق = ± ۱

۱- اگر ا ل - ب ق = ۱ تو

ا لا + ب ما = ج (ا ل - ب ق)

∴ ا (ج ل - لا) = ب (ما + ج ق)

∴ (ج ل - لا)/ب = (ما + ج ق)/ا = د، کوئی صحیح عدد

∴ لا = ج ل - ب د اور ما = ا د - ج ق

جس سے د کو ج ق/ا سے بڑی اور ج ل/ب سے چھوٹی مثبت صحیح عددی قیمتیں دینے سے مطلوبہ مثبت صحیح عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں۔

پس اس صورت میں مطلوبہ حلّوں کی تعداد محدود ہوگی اور اگر کوئی صحیح عدد ایسا نہ ہو جو اِن شرائط کو پورا کرے تو کوئی حل نہ ہوگا۔

۲- اگر ا ل - ب ق = -۱ تو

ا لا + ب ما = - ج (ا ل - ب ق)

∴ ا (لا + ج ل) = ب (ج ق - ما)

∴ (لا + ج ق)/ب = (ج ق - ما)/ا = د، (صحیح عدد)

∴ لا = ب د - ج ل، ما = ج ق - ا د

جس سے د کو ایسی مثبت صحیح عددی قیمتیں دینے سے

جو $\frac{ج ل}{ب}$ سے بڑی اور $\frac{ج ق}{ا}$ سے چھوٹی ہوں مطلوبہ حل صحیح عددوں میں حاصل ہو سکتے ہیں۔ حسب سابق حلّوں کی تعداد اس صورت میں بھی محدود ہے اور ممکن ہے کہ کوئی بھی حل نہ ہو۔

۳۔ اگر ا یا ب ایک کے مساوی ہو تو دفعہ ۳۴۷ کی طرح حلّ محض دیکھنے سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

۳۵۰۔ اگر مساوات ا لا + ب ما = ج کا ایک حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم ہو تو عام حل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ا لا + ب ما = ج کا ایک حل ھ، ک ہے،

تب ا ھ + ب ک = ج

$$\therefore \text{ا لا + ب ما = ا ھ + ب ک}$$

$$\therefore \text{ا(لا - ھ) = ب (ک - ما)}$$

$$\therefore \frac{\text{لا - ھ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ک - ما}}{\text{ا}} = \text{د} \quad \text{(صحیح عدد)}$$

$$\therefore \text{لا = ھ + ب د، ما = ک - ا د}$$

جو مطلوبہ عام حل ہے۔

۳۵۱۔ معلوم کرو کہ مساوات ا لا + ب ما = ج کے مثبت صحیح عددوں میں کتنے حل ہیں۔

$\frac{ا}{ب}$ کو مسلسل کسر میں تحویل کرو اور فرض کرو کہ $\frac{ا}{ب}$ کے عین پہلے کا مستدق $\frac{ق}{ل}$ ہے، تب ا ل - ب ق = ± ۱

(۱) فرض کرو کہ ا ل - ب ق = ۱، تب عام حل ہو گا

لا = ج ل - ب ذ ، ما = ا ذ - ج ق　　[دفعہ ۳۴۹]

اِن مساواتوں میں ذ کو ایسی مثبت صحیح عددی قیمتیں دینے سے جو $\frac{\text{ج ل}}{\text{ب}}$ سے بڑی نہ ہوں اور $\frac{\text{ج ق}}{\text{ا}}$ سے چھوٹی نہ ہوں مطلوبہ مثبت صحیح عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ $\frac{\text{ج}}{\text{ا}}$ اور $\frac{\text{ج}}{\text{ب}}$ صحیح اعداد نہیں ہیں

فرض کرو کہ $\frac{\text{ج ق}}{\text{ا}} = \text{م} + \text{ف}$ ، $\frac{\text{ج ل}}{\text{ب}} = \text{ن} + \text{گ}$ رکھو، جہاں م اور ن مثبت صحیح اعداد ہیں اور ف اور گ کسور واجب ہیں، تب ذ کی جو کم سے کم قیمت ہو سکتی ہے وہ م + ۱ ہے اور بڑی سے بڑی قیمت ن ہے

لہذا حلّوں کی تعداد ہے

$$\text{ن} - \text{م} = \frac{\text{ج ل}}{\text{ب}} - \frac{\text{ج ق}}{\text{ا}} + \text{ف} - \text{گ}$$

$$= \frac{\text{ج}}{\text{اب}} + \text{ف} - \text{گ}$$

اب یہ ایک صحیح عدد ہے جو اُس صورت میں جب ف بڑا ہو گ سے $\frac{\text{ج}}{\text{اب}}$ + ایک کسر کی شکل میں اور جب ف چھوٹا ہو گ سے تو $\frac{\text{ج}}{\text{اب}}$ - ایک کسر کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے، بالفاظ دیگر حلّوں کی تعداد اس صحیح عدد سے تعبیر ہوتی ہے جو $\frac{\text{ج}}{\text{اب}}$ کے قریب ترین ہو اور جو اس سے بڑا ہو اگر

ف > گ اور چھوٹا ہو اگر ف < گ

۲۔ فرض کرو کہ $\frac{ج}{ب}$ کوئی صحیح عدد ہے

اس صورت میں گ = ۰ اور لا کی ایک قیمت صفر ہے، اگر ہم اس کو شامل کرلیں تو حلّوں کی تعداد $\frac{ج}{اب}$ + ن ہے جو لازماً ایک صحیح عدد ہوگا۔ پس اگر ہم صفر والے حل کو شمار میں لائیں تو حلّوں کی تعداد اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے تعبیر ہوگی جو $\frac{ج}{اب}$ + ۱ میں شامل ہے اور اگر صفر والے حل کو شمار میں نہ لائیں تو اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے تعبیر ہوگی جو $\frac{ج}{اب}$ میں شامل ہے۔

۳۔ فرض کرو کہ $\frac{ج}{ا}$ ایک صحیح عدد ہے

اس صورت میں ف = ۰ اور ما کی ایک قیمت صفر ہے، اگر ہم اس کو شامل کرلیں تو د کی کم سے کم قیمت ص اور بڑی سے بڑی قیمت ن ہے، پس حلّوں کی تعداد ن ۔ ص + ۱ یا $\frac{ج}{اب}$ ۔ گ + ۱ ہے، لہذا اگر ہم صفر والے حل کو شمار کریں تو حلّوں کی تعداد اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے تعبیر ہوگی جو $\frac{ج}{اب}$ + ۱ میں شامل ہے اور اگر ہم صفر والے حل کو شمار میں نہ لائیں تو اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے تعبیر ہوگی جو $\frac{ج}{اب}$ میں شامل ہے۔

۴۔ فرض کرو کہ $\frac{ج}{ا}$ اور $\frac{ج}{ب}$ دونوں صحیح اعداد ہیں۔

اس صورت میں ف = ۰ اور گ = ۰ اور لا اور ما دونوں کی ایک ایک قیمت صفر ہے۔ اگر ہم اِن کو شمار میں لائیں تو د کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت م ہو سکتی ہے اور بڑی سے بڑی ن، پس حلّوں کی تعداد ن ۔ م + ۱ یا $\frac{ج}{اب}$ + ۱ ہے، اگر ہم صفر والی قیمتوں کو شمار نہ کریں تو حلّوں کی تعداد $\frac{ج}{اب}$ ۔ ۱ ہے۔

۲۔ اگر ا ل ۔ ب ق = ۔ ۱، تو عام حل ہے

لا = ب د ۔ ج ل، ما = ج ق ۔ ا د

اور مماثل نتیجے مستنبط ہو سکتے ہیں

۳۵۲۔ مساوات ا لا + ب ما + ج ی = ر کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرنے کے لئے یوں عمل کرنا چاہئے۔ عمل نقل سے ا لا + ب ما = ر ۔ ج ی، اس میں ی کو بالتواتر قیمتیں ۰، ۱، ۲، ۳، ..... دینے سے ہمیں ا لا + ب ما = ج کی شکل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جن کو حسب سابق حل کیا جا سکتا ہے۔

۳۵۳۔ اگر ہمارے پاس دو ہمزاد مساواتیں

ا لا + ب ما + ج ی = ر

اَ لا + بَ ما + جَ ی = رَ

ہوں تو ایک مجہول مثلاً ی کو ساقط کرنے سے ہمیں اِ لا + ب ما = ج کی شکل کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے،

فرض کرو کہ اس مساوات کا ایک حل لا = ف اور ما = گ ہے،
تب عام حل کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے

لا = ف + ب١ س، ما = گ - ا١ س جہاں س
کوئی صحیح عدد ہے۔

لا اور ما کی یہ قیمتیں اوپر کی مساواتوں میں سے کسی ایک میں مندرج کرنے سے ہمیں ف١ س + گ١ ی = ھ١ کی شکل کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے، فرض کرو کہ اس کا عام حل یہ ہے

س = ھ + گ١ د

ی = ک - ف١ د

س کی قیمت مندرج کرنے سے

لا = ف + ب١ ھ + ب١ گ١ د

ما = گ - ا١ ھ - ا١ گ١ د

لا، ما، ی کی قیمتیں، د کو مناسب صحیح عددی قیمتیں دینے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

۳۵۴- اگر معادلات

ا لا + ب ما + ج ی = د اور اَ لا + بَ ما + جَ ی = دَ

کا ایک حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم ہو سکے تو عام حل معلوم کرنے کے لئے یوں عمل کرنا چاہئے۔

فرض کرو کہ ف، گ، ھ ایک حل ہے، تب

ا ف + ب گ + ج ھ = د اور اَ ف + بَ گ + جَ ھ = دَ

تفریق کرنے سے

ا(لا - ف) + ب(ما - گ) + ج(ی - ھ) = ۰

$$\text{اَ}(\text{لا} - \text{ف}) + \text{بَ}(\text{ما} - \text{گ}) + \text{جَ}(\text{ی} - \text{ھ}) = ۰$$

ان سے

$$\frac{\text{لا} - \text{ف}}{\text{ب جَ} - \text{جَ ب}} = \frac{\text{ما} - \text{گ}}{\text{ج اَ} - \text{جَ ا}} = \frac{\text{ی} - \text{ھ}}{\text{ا بَ} - \text{اَ ب}} = \frac{\text{د}}{\text{ک}}$$

جہاں د ایک صحیح عدد ہے اور ک نسب نماؤں ب جَ - ج بَ، ج اَ - جَ ا، اور ا بَ - اَ ب کے عاد اعظم کو تعبیر کرتا ہے، پس عام حل یہ ہے

$$\text{لا} = \text{ف} + (\text{ب جَ} - \text{بَ ج})\frac{\text{د}}{\text{ک}}،\quad \text{ما} = \text{گ} + (\text{ج اَ} - \text{جَ ا})\frac{\text{د}}{\text{ک}}$$

$$\text{ی} = \text{ھ} + (\text{ا بَ} - \text{اَ ب})\frac{\text{د}}{\text{ک}}$$

امثلہ نمبری ۲۶

ذیل کی مساواتوں کا عام حل اور چھوٹے سے چھوٹا مثبت حل صحیح اعداد میں معلوم کرو۔

۱۔ ۷۷۵ لا - ۱۱۷ ما = ۱ ۲۔ ۴۵۵ لا - ۵۱۹ ما = ۱

۳۔ ۴۳۶ لا - ۳۹۳ ما = ۵

۴۔ ۱ پونڈ ۱۹ شلنگ ۶ پنس کتنے طریقوں سے فلورنوں اور نصف کراؤنوں میں ادا کئے جا سکتے ہیں۔

۵۔ معلوم کرو کہ مساوات ۱۱ لا + ۱۵ ما = ۱۰۳۱ کے حل مثبت صحیح اعداد میں کتنے ہیں۔

۶۔ دو کسریں معلوم کرو جن کے نسب نما بالترتیب ۷ اور ۹ ہوں اور جنکا مجموعہ $\frac{۱۰}{۶۳}$ ۱ کے مساوی ہو۔

۷- دو مفرد کسور واجب معلوم کرو جن کے نسب نما بالترتیب ۱۲ اور ۸ ہوں اور جن کا فرق $\frac{۱}{۲۴}$ کے مساوی ہو۔

۸- ایک خاص رقم میں، لا پونڈ ما شلنگ ہیں اور یہ رقم ما پونڈ لا شلنگ کا نصف ہے، رقم کی مقدار معلوم کرو۔

مثبت صحیح اعداد میں حل کرو۔

۹- ۶لا + ۷ما + ۴ی = ۱۲۲
۱۱لا + ۸ما - ۶ی = ۱۴۵

۱۰- ۱۲لا - ۱۱ما + ۴ی = ۲۲
۴لا + ۵ما + ی = ۱۷

۱۱- ۲۰لا - ۲۱ما = ۳۸
۳ما + ۴ی = ۳۴

۱۲- ۱۳لا + ۱۱ی = ۱۰۳
۷ی - ۵ما = ۴

۱۳- ۷لا + ۴ما + ۱۹ی = ۸۴

۱۴- ۲۳لا + ۱۷ما + ۱۱ی = ۱۳۰

۱۵- اُن تمام مثبت صحیح اعداد کی عام سے عام شکل معلوم کرو کہ اگر ان کو ۵، ۷، ۸ پر تقسیم کیا جائے تو باقیاں بالترتیب ۳، ۲، ۵ بچیں۔

۱۶- دو چھوٹے سے چھوٹے صحیح اعداد معلوم کرو کہ اگر ان کو ۳، ۷، ۱۱ پر تقسیم کیا جائے تو باقیاں بالترتیب ۱، ۶، ۵ ہوں۔

۱۷- سبعی پیمانہ میں تین ہندسوں کا ایک عدد تسعی پیمانہ میں انہی تین ہندسوں سے تعبیر ہوتا ہے لیکن ہندسوں کی ترتیب اُلٹ جاتی ہے، اگر ہر صورت میں درمیانی ہندسہ صفر ہو تو عشری پیمانہ میں اس عدد کی قیمت معلوم کرو۔

۱۸- اگر صحیح اعداد ۶، ا، ب سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو ا اور ب کی تمام ممکن قیمتیں معلوم کرو۔

۱۹- مساوی طول کی دو سلاخیں الگ الگ ۲۵۰ اور ۲۴۳ مساوی حصوں میں تقسیم کی گئی ہیں، اگر ان کے سرے ایک دوسرے پر منطبق ہوں تو بتاؤ کہ کونسے نشان ایک دوسرے کے قریب ترین

واقع ہوں گے۔

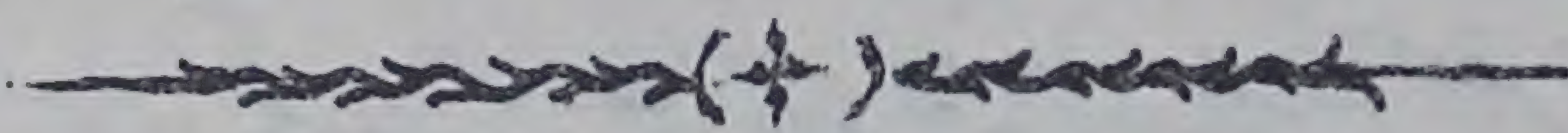
۲۰۔ تین گھنٹے ایک ساتھ بجنا شروع ہوتے ہیں اور بالترتیب ۲۳، ۳۴، ۲۹ سکنڈوں کے وقفوں سے بجتے ہیں، دوسرا اور تیسرا گھنٹہ پہلے گھنٹہ کی نسبت بالترتیب ۳۹ اور ۴۰ سکنڈ زیادہ بجتے ہیں اگر تینوں سب ۲۰ منٹ سے پہلے بجنا بند ہو جائیں تو بتاؤ کہ ہر ایک گھنٹہ کتنی دفعہ بجا ہے۔

۲۱۔ ج کی ایسی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو کہ مساوات ۷لا + ۹ما = ج کے مثبت صحیح اعداد میں پورے چھ حل ہوں۔

۲۲۔ ج کی ایسی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو کہ مساوات ۴لا + ۱۱ما = ج کے مثبت صحیح اعداد میں پورے پانچ حل ہوں۔

۲۳۔ وہ حدود معلوم کرو جن کے اندر ج کو واقع ہونا چاہیے تاکہ مساوات ۱۹لا + ۱۴ما = ج کے چھ حل ہوں جبکہ صفر والے حل شمار میں نہ لائے جائیں۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ اگر مساوات ا لا + ب ما = ج کے مثبت صحیح اعداد میں پورے ن حل ہوں تو ج کی بڑی سے بڑی قیمت (ن + ۱) ا ب - ا - ب ہے اور چھوٹی سے چھوٹی (ن - ۱) ا ب + ا + ب جبکہ صفر والے حلوں کو شمار میں نہ لایا جائے۔



ستائیسواں باب

متوالی مسلسل کسور

۳۵۵ - پچیسویں باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک مسلسل کسر کو جس کے خارج قسمت ناطق ہوں ایک ایسی معمولی کسر میں تحویل کیا جا سکتا ہے جس کا شمار کنندہ اور نسب نما دونوں صحیح عدد ہوں، اس لحاظ سے یہ کسر غیر ناطق یا اصم مقدار کے مساوی نہیں ہو سکتی۔ لیکن یہاں ہم ثابت کریں گے کہ درجۂ دوم کی مقدار اصم ایک ایسی لاتناہی مسلسل کسر میں تحویل ہو سکتی ہے جس کے خارج قسمت متوالی ہوں، پہلے ہم ایک عددی مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال - $\sqrt{19}$ کو مسلسل کسر کی شکل میں لاؤ اور اُن کسروں کا ایک ایسا سلسلہ معلوم کرو جو اس کی قیمت کی طرف استدقاق کرے۔

$$\sqrt{19} = 4 + (\sqrt{19} - 4) = 4 + \frac{3}{\sqrt{19} + 4}$$

$$\frac{\sqrt{19} + 4}{3} = 2 + \frac{\sqrt{19} - 2}{3} = 2 + \frac{5}{\sqrt{19} + 2}$$

$$\frac{\sqrt{19} + 2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{19} - 3}{5} = 1 + \frac{2}{\sqrt{19} + 3}$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{19}-3}{2} = 3 + \frac{5}{\sqrt{19}+3}$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{19}-2}{5} = 1 + \frac{3}{\sqrt{19}+2}$$

$$\frac{\sqrt{19}+2}{3} = 2 + \frac{\sqrt{19}-4}{3} = 2 + \frac{1}{\sqrt{19}+4}$$

$$\sqrt{19}+4 = 8 + (\sqrt{19}-4) = 8 + \ldots\ldots\ldots$$

اس کے بعد خارج قسمت ۲، ۱، ۳، ۱، ۲، ۸ متوالی ہونا شروع ہوتے ہیں، اس لئے

$$\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{8+}\,\ldots\ldots$$

یہاں یہ بات قابل غور ہے کہ جب ہم اُس خارج قسمت پر پہنچ جاتے ہیں جو پہلے خارج قسمت سے دُگنا ہو تو خارج قسمت متوالی ہونا شروع ہوتے ہیں۔ دفعہ ۳۶۱ میں ہم ثابت کرینگے کہ ہر صورت میں یہی واقع ہوتا ہے۔

[تشریح۔ اوپر کی ہر ایک سطر میں ہم نے ایک ہی طرح کا عمل کیا۔ مثلاً دوسری سطر پر غور کرو۔ ہم پہلے $\frac{\sqrt{19}+4}{3}$ کا بڑے سے بڑا صحیح عدد معلوم کرتے ہیں یہ عدد ۲ ہے اور باقی $\frac{\sqrt{19}+4}{3} - 2$ یعنی $\frac{\sqrt{19}-2}{3}$ ہے، اس کے بعد ہم شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $\sqrt{19}-2$ کے مزدوج سے ضرب دیتے ہیں پھر ماحصل یعنی $\frac{5}{\sqrt{19}+2}$ کو اُلٹا کر ہم منطق نسب نما سے نئی سطر شروع کرتے ہیں]

پہلے سات مستدق جو دفعہ ۳۳۶ کے مطابق بنائے گئے ہیں یہ ہیں

$$\frac{۴}{۱}،\ \frac{۹}{۲}،\ \frac{۱۳}{۳}،\ \frac{۴۸}{۱۱}،\ \frac{۶۱}{۱۴}،\ \frac{۱۷۰}{۳۹}،\ \frac{۱۴۲۱}{۳۲۶}$$

آخری مستدق کو کسر کی بجائے لینے سے غلطی $\left(\frac{۱}{۳۲۶}\right)^{۲}$ سے کم ہے

یعنی $\left(\frac{۱}{۳۲۰}\right)^{۲}$ سے یا $\frac{۱}{۱۰۲۴۰۰}$ سے کم ہے اور بنائً علیہ ۰۰۰۰۱. سے کم ہے، گویا ساتویں مستدق سے اعشاریہ کے کم از کم ۴ درجوں تک درست قیمت حاصل ہوتی ہے۔

۳۵۶۔ ہر دوری کسر مسلسل کی قیمت ایک ایسی مساوات درجہ دوم کی ایک اصل کے مساوی ہوتی ہے جس کے سر ناطق ہوں

مسلسل کسر کو لا سے اور دوری حصہ کو ما سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ

$$لا = ا + \frac{۱}{ب+}\ \frac{۱}{ج+} \cdots \frac{۱}{ھ+}\ \frac{۱}{ک+}\ \frac{۱}{ما}$$

$$اور\ ما = م + \frac{۱}{ن+} \cdots\cdots \frac{۱}{ع+}\ \frac{۱}{و+}\ \frac{۱}{ما}$$

جہاں ا، ب، ج، ھ، ک، م، ن، ... ع، و مثبت صحیح اعداد ہیں

فرض کرو کہ $\frac{ق}{ل}$، $\frac{ق'}{ل'}$ بالترتیب خارج قسمتوں ھ، ک کے متناظر لا کے مستدق ہیں، تب چونکہ ما مکمل خارج قسمت ہے اس لئے

$$لا = \frac{ق'\,ما + ق}{ل'\,ما + ل}\ \text{جس سے}\ ما = \frac{ق - ل\,لا}{ل'\,لا - ق'}$$

فرض کرو کہ $\frac{ر}{س}$، $\frac{ر'}{س'}$ بالترتیب خارج قسمتوں ع، و کے جواب

میں ما کے متدق ہیں، تب $\text{ما} = \frac{\text{رَ ما} + \text{ر}}{\text{سَ ما} + \text{س}}$

ما کی قیمت لا کی رقوم میں مندرج کرنے اور مختصر کرنے سے ہمیں درجہ دوم کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جسکے سر ناطق ہیں۔

ما کی قیمت جس مساوات سے حاصل ہوتی ہے وہ

$\text{سَ ما}^2 + (\text{س} - \text{رَ})\,\text{ما} - \text{ر} = ۰$ ہے، اس کی اصلیں حقیقی اور مختلف ہیں،

اگر ما کی مثبت قیمت $\text{لا} = \frac{\text{قَ ما} + \text{ق}}{\text{لَ ما} + \text{ل}}$ میں درج کی جائے اور نسب نما کو ناطق بنایا جائے تو لا کی جو قیمت حاصل ہوگی اس کی شکل $\frac{\text{ا} + \sqrt{\text{ب}}}{\text{ج}}$ ہوگی جہاں ا، ب، ج صحیح اعداد ہیں اور ب مثبت ہے کیونکہ ما کی قیمت حقیقی ہے۔

مثال۔ سلسلہ $۱ + \frac{1}{۲+}\ \frac{1}{۳+}\ \frac{1}{۲+}\ \frac{1}{۳+}$ .... کو مقدار اصم کی شکل میں لاؤ

فرض کرو کہ کسر مسلسل کی قیمت لا ہے، تب

$\text{لا} - ۱ = \frac{1}{۲+}\ \frac{1}{۳ + (\text{لا} - ۱)}$ جس سے $۲\,\text{لا}^2 + ۲\,\text{لا} - ۷ = ۰$.

مسلسل کسر کی قیمت اس مساوات کی مثبت اصل کے مساوی ہے اور اس لئے $\frac{\sqrt{۱۵} - ۱}{۲}$ کے مساوی ہے۔

امثلہ نمبری ۲۷ (ا)

ذیل کی مقادیر اصم کو مسلسل کسور کی شکل میں لاؤ اور ہر ایک کسر کا ۶ واں متدق معلوم کرو۔

۱- $\sqrt{۳}$ ۲- $\sqrt{۵}$ ۳- $\sqrt{۶}$ ۴- $\sqrt{۸}$ ۵- $\sqrt{۱۱}$ ۶- $\sqrt{۱۳}$

۷- $\sqrt{14}$ ۸- $\sqrt{22}$ ۹- $2\sqrt{3}$ ۱۰- $4\sqrt{2}$ ۱۱- $3\sqrt{5}$

۱۲- $4\sqrt{10}$ ۱۳- $\sqrt{\frac{1}{21}}$ ۱۴- $\sqrt{\frac{1}{33}}$ ۱۵- $\sqrt{\frac{6}{5}}$ ۱۶- $\sqrt{\frac{7}{11}}$

۱۷- $\frac{268}{65}$ کو $\sqrt{17}$ کی بجائے لینے سے جو غلطی واقع ہوتی ہے اس کی حدود معلوم کرو۔

۱۸- غلطی کی حدود دریافت کرو جب کہ $\frac{916}{191}$ کو $\sqrt{23}$ کی بجائے لیا جائے۔

۱۹- $\sqrt{101}$ کا پہلا مستدق معلوم کرو جو اعشاریہ کے پانچویں مقام تک درست ہو۔

۲۰- $\sqrt{15}$ کا پہلا مستدق معلوم کرو جو اعشاریہ کے پانچویں مقام تک درست ہو۔

ذیل کی مساواتوں میں سے ہر ایک کی مثبت اصل کو مسلسل کسر کی شکل میں لاؤ۔

۲۱- $لا^2 + 2لا - 1 = 0$ ۲۲- $لا^2 - 4لا - 3 = 0$

۲۳- $7لا^2 - 8لا - 3 = 0$

۲۴- مساوات $لا^2 - 5لا + 3 = 0$ کی ہر ایک اصل کو مسلسل کسر کی شکل میں لاؤ۔

۲۵- $3 + \frac{1}{6+}\frac{1}{6+}\frac{1}{6+}\cdots$ کی قیمت معلوم کرو۔

۲۶- $\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\cdots$ کی قیمت معلوم کرو۔

۲۷- $3 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\cdots$ کی قیمت معلوم کرو۔

۲۸- $5 + \frac{1}{1+}\;\frac{1}{1+}\;\frac{1}{1+}\;\frac{1}{10+}$ .... کی قیمت معلوم کرو۔

۲۹- ثابت کرو کہ

$$3 + \frac{1}{1+}\;\frac{1}{6+}\;\frac{1}{1+}\;\frac{1}{6+} \ldots\ldots = 3\left(1 + \frac{1}{3+}\;\frac{1}{2+}\;\frac{1}{3+}\;\frac{1}{2+}\ldots\right)$$

۳۰- ذیل کی دو لامتناہی کسور کا باہمی فرق معلوم کرو

$$\frac{1}{1+}\;\frac{1}{3+}\;\frac{1}{5+}\;\frac{1}{1+}\;\frac{1}{3+}\;\frac{1}{5+}\ldots\ldots,$$

اور
$$\frac{1}{3+}\;\frac{1}{1+}\;\frac{1}{5+}\;\frac{1}{3+}\;\frac{1}{1+}\;\frac{1}{5+}\ldots\ldots$$

۲۵۷- درجہ دوم کی ایک مقدار اصم کو مسلسل کسر کی شکل میں تحویل کرو۔

فرض کرو کہ ث ایک مثبت صحیح عدد ہے جو پورا مربع نہیں ہے اور بڑے سے بڑا صحیح عدد جو $\sqrt{\text{ث}}$ میں شامل ہے ا_1 ہے، تب

$$\sqrt{\text{ث}} = \text{ا}_1 + (\sqrt{\text{ث}} - \text{ا}_1) = \text{ا}_1 + \frac{\text{ل}_1}{\sqrt{\text{ث}} + \text{ا}_1} \quad \text{جہاں } \text{ل}_1 = \text{ث} - \text{ا}_1^2$$

نیز فرض کرو کہ بڑے سے بڑا صحیح عدد جو $\frac{\sqrt{\text{ث}} + \text{ا}_1}{\text{ل}_1}$ میں شامل ہے ب_1 ہے، تب

$$\frac{\sqrt{\text{ث}} + \text{ا}_1}{\text{ل}_1} = \text{ب}_1 + \frac{\sqrt{\text{ث}} - \text{ب}_1\text{ل}_1 + \text{ا}_1}{\text{ل}_1} = \text{ب}_1 + \frac{\sqrt{\text{ث}} - \text{ا}_2}{\text{ل}_1} = \text{ب}_1 + \frac{\text{ل}_2}{\sqrt{\text{ث}} + \text{ا}_2}$$

جہاں $\text{ا}_2 = \text{ب}_1\text{ل}_1 - \text{ا}_1$ اور $\text{ل}_1\text{ل}_2 = \text{ث} - \text{ا}_2^2$

اسی طرح سے
$$\frac{\sqrt{\text{ث}} + \text{ا}_2}{\text{ل}_2} = \text{ب}_2 + \frac{\sqrt{\text{ث}} - \text{ا}_3}{\text{ل}_2} = \text{ب}_2 + \frac{\text{ل}_3}{\sqrt{\text{ث}} + \text{ا}_3}$$

جہاں $ا_۲ = ب_۱ ل_۱ - ا_۱$ اور $ل_۱ ل_۲ = ث - ا_۲^۲$
علیٰ ہذا القیاس، عام طور پر

$$\frac{\sqrt{ث} + ا_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}} = ب_{ن-۱} + \frac{\sqrt{ث} - ا_ن}{ل_{ن-۱}} = ب_{ن-۱} + \frac{ل_ن}{\sqrt{ث} + ا_ن}$$

جہاں $ا_ن = ب_{ن-۱} ل_{ن-۱} - ا_{ن-۱}$ اور $ل_{ن-۱} ل_ن = ث - ا_ن^۲$

اس لئے $\sqrt{ث} = ا_۱ + \frac{۱}{ب_۱ +} \frac{۱}{ب_۲ +} \frac{۱}{ب_۳ +} \frac{۱}{ب_۴ +} \cdots$

اس طرح سے $\sqrt{ث}$ کو ایک لامتناہی مسلسل کسر کی شکل میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ ہم ابھی یہ ثابت کرینگے کہ یہ کسر متوالی دوروں پر مشتمل ہے، یہ ظاہر ہے کہ نیا دور شروع ہوگا جب کوئی تکمیل خارج قسمت پہلی دفعہ عود کرکے آئیگا۔
ہم خارج قسمتوں

$$\sqrt{ث}،\ \frac{\sqrt{ث} + ا_۱}{ل_۱}،\ \frac{\sqrt{ث} + ا_۲}{ل_۲}،\ \frac{\sqrt{ث} + ا_۳}{ل_۳}،\ \cdots\cdots$$

کے سلسلہ کو بالترتیب پہلے، دوسرے، تیسرے اور چوتھے تکمیل خارج قسمت کے نام سے موسوم کرینگے۔

۲۵۸۔ دفعہ ماقبل سے یہ ظاہر ہے کہ مقادیر $ا_۱$، $ا_۲$، $ب_۱$، $ب_۲$، ...... سب مثبت صحیح عدد ہیں، اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ مقادیر $ا_۲$، $ا_۳$، ...... $ل_۱$، $ل_۲$، $ل_۳$ ...... وغیرہ بھی مثبت صحیح عدد ہیں

فرض کرو کہ $\frac{ق}{ل}$، $\frac{ق'}{ل'}$، $\frac{ق''}{ل''}$ تین متواتر مستدق ہیں

$\sqrt{ث}$ کے اور $\frac{ق'}{ل'}$ متدق ہے جو جزوی خارج قسمت $ب_ن$ کے جواب میں ہے۔

اس منزل پر مکمل خارج قسمت $\frac{\sqrt{ث}+ا_ن}{ل_ن}$ ہوگا، اس لئے

$$\sqrt{ث} = \frac{\frac{\sqrt{ث}+ا_ن}{ل_ن}ق'+ق}{\frac{\sqrt{ث}+ا_ن}{ل_ن}ل'+ل} = \frac{ق'\sqrt{ث}+ا_ن ق'+ل_ن ق}{ل'\sqrt{ث}+ا_ن ل'+ل_ن ل}$$

کسریں صاف کرنے اور ناطق اور غیر ناطق حصوں کو جداگانہ مساوی کرنے سے $ا_ن ق'+ل_ن ق=ث ل'$، $ا_ن ل'+ل_ن ل=ق'$
جس سے $ا_ن(ق ل'-ق' ل)=ق ق'-ل ل' ث$ اور

$$ل_ن(ق ل'-ق' ل)=ث ل'^2-ق'^2$$

لیکن $ق ل'-ق' ل=\pm 1$ اور $ق ل'-ق' ل$، $ق ق'-ل ل' ث$ اور $ث ل'^2-ق'^2$ کی علامت ایک ہی ہے (دیکھو دفعہ ۳۴۴) اس لئے $ا_ن$ اور $ل_ن$ مثبت صحیح اعداد ہیں، چونکہ دو متدق مکمل خارج قسمت $\frac{\sqrt{ث}+ا_ن}{ل_ن}$ سے پہلے آتے ہیں، یہ تحقیقات ن کی اُن تمام قیمتوں کے لئے جو ۱ سے بڑی ہوں برقرار رہتی ہے۔

۳۵۹ – ثابت کرو کہ مکمل اور جزوی خارج قسمت متوالی ہوتے ہیں۔
دفعہ ۳۵۷ میں ہم ثابت کرچکے ہیں کہ $ل_ن ل_{ن-1}=ث-ا_ن^2$،
نیز $ل_ن$ اور $ل_{ن-1}$ مثبت صحیح اعداد ہیں، اِس لئے $ا_ن$ لازماً

کم ہو گا √اث سے، پس اُن بڑا نہیں ہو سکتا اُ سے، لہٰذا یہ سوائے ۱، ۲، ۳، ..... اُ کے اور کوئی قیمت اختیار نہیں کر سکتا یعنی اُن جو مختلف قیمتیں اختیار کر سکتا ہے اُن کی تعداد کبھی اُ سے بڑی نہیں ہو سکتی۔

نیز اُن+۱ = لن بن - اُن یعنی لن بن = اُن + اُن+۱، پس لن بن، ۲ اُ سے بڑا نہیں ہو سکتا، نیز بن ایک مثبت صحیح عدد ہے اس لئے لن کبھی ۲ اُ سے بڑا نہیں ہو سکتا لہٰذا لن سوائے ۱، ۲، ۳، ..... ۲ اُ کے اور کوئی قیمت اختیار نہیں کر سکتا یعنی لن جو مختلف قیمتیں اختیار کر سکتا ہے اُن کی تعداد کبھی ۲ اُ سے بڑی نہیں ہو سکتی۔

پس مکمل خارج قسمت (√اث + اُن)/لن کی مختلف قیمتوں کی تعداد کبھی ۲ اُ² سے بڑی نہیں ہو سکتی، اس لئے ضرور ہے کہ کوئی ایک مکمل خارج قسمت اور بنابریں اس کے بعد کے تمام خارج قسمت عود کریں یعنی متوالی ہوں۔

نیز بن، (√اث + اُن)/لن میں کا بڑے سے بڑا صحیح عدد ہے، پس جزوی خارج قسمت بھی ضرور متوالی ہوں گے۔ اور ہر دور میں جزوی خارج قسمتوں کو تعداد ۲ اُ² سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔

۳۶۰۔ ثابت کرو کہ اُ > اُن + لن

ہم جانتے ہیں کہ اُن-۱ + اُن = بن-۱ لن-۱

∴ اُن-۱ + اُن = یا > لن-۱

چونکہ بن-۱ ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

$$\therefore \sqrt{ث} + ا_ن > ل_{ن-1}$$

$$\text{لیکن } ث - ا_ن^2 = ل_ن ل_{ن-1}$$

$$\therefore \sqrt{ث} - ا_ن < ل_ن$$

$\therefore ا_1 - ا_ن < ل_ن$، پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۳۶۱ - ثابت کرو کہ دور دوسرے جزوی خارج قسمت سے شروع ہوتا ہے اور پہلے جزوی خارج قسمت سے دُگنے خارج قسمت پر ختم ہوتا ہے۔

ہم دفعہ ۳۵۹ میں دیکھ چکے ہیں کہ خارج قسمتوں کا متوالی ہونا لازمی ہے، اس لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ (ن + ۱) واں مکمل خارج قسمت (س + ۱) ویں مکمل خارج قسمت پر عود کرکے آتا ہے یعنی (ن + ۱) واں اور (س + ۱) واں مکمل خارج قسمت باہم مساوی ہیں، تب

$$ا_س = ا_ن ،\quad ل_س = ل_ن ،\quad ب_س = ب_ن$$

ہم ثابت کرینگے کہ

$$ا_{س-1} = ا_{ن-1} ،\quad ل_{س-1} = ل_{ن-1} ،\quad ب_{س-1} = ب_{ن-1}$$

ہمیں معلوم ہے کہ

$$ل_{س-1} ل_س = ث - ا_س^2 = ث - ا_ن^2 = ل_{ن-1} ل_ن = ل_{ن-1} ل_س$$

$$\therefore ل_{س-1} = ل_{ن-1}$$

نیز $ا_{ن-1} + ا_ن = ب_{ن-1} ل_{ن-1}$ ، $ا_{س-1} + ا_س = ب_{س-1} ل_{س-1}$

$$= ب_{س-۱}\, ل_{ن-۱}$$

$$\therefore\ ا_{ن-۱} - ا_{س-۱} = ل_{ن-۱}(ب_{ن-۱} - ب_{س-۱})$$

$$\therefore\ \frac{ا_{ن-۱} - ا_{س-۱}}{ل_{ن-۱}} = ب_{ن-۱} - ب_{س-۱} = ۰$$ یا کوئی صحیح عدد

لیکن دفعہ ۳۶۰ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ $ا_۱ - ا_{ن-۱} < ل_{ن-۱}$ اور $ا_۱ - ا_{س-۱} < ل_{س-۱}$ یعنی $ا_۱ - ا_{س-۱} < ل_{ن-۱}$

اس لئے $ا_{ن-۱} - ا_{س-۱} < ل_{ن-۱}$، پس $\frac{ا_{ن-۱} - ا_{س-۱}}{ل_{ن-۱}}$ ایک سے کم ہے ایک سے اس لئے یہ لازماً صفر ہوگا۔

پس $ا_{س-۱} = ا_{ن-۱}$ نیز $ب_{س-۱} = ب_{ن-۱}$

اس لئے اگر (ن + ۱) واں مکمل خارج قسمت متوالی ہو تو ن واں مکمل خارج قسمت بھی لازماً متوالی ہوگا، اس لئے پس (ن - ۱) واں مکمل خارج قسمت بھی لازماً متوالی ہوگا، علیٰ ہٰذا القیاس یہ ثبوت برقرار رہتا ہے تاوقتیکہ ن، ۲ سے کم نہ ہو جائے (دیکھو دفعہ ۳۵۸) پس مکمل خارج قسمت دوسرے خارج قسمت $\frac{\sqrt{ت}+ا_۱}{ل_۱}$ سے شروع ہوکر متوالی ہوتے ہیں، اس سے ظاہر ہے کہ متوالیت دوسرے جزوی خارج قسمت $ب_۱$ سے شروع ہوتی ہے، اب ہم یہ بتائیں گے کہ یہ جزوی خارج قسمت $۲ ا_۱$ پر ختم ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ $\frac{\sqrt{ث}+ا_{ن}}{ل_{ن}}$ وہ تکمیل خارج قسمت ہے جو دوسرے تکمیل خارج قسمت $\frac{\sqrt{ث}+ا_{۱}}{ل_{۱}}$ سے عین پہلے واقع ہوتا ہے جبکہ موخرالذکر عود کرکے آئے، تب $\frac{\sqrt{ث}+ا_{ن}}{ل_{ن}}$ اور $\frac{\sqrt{ث}+ا_{۱}}{ل_{۱}}$ دو متواتر تکمیل خارج قسمت ہیں، اسلئے

$$ا_{ن} + ا_{۱} = ل_{ن}\, ب_{ن}،\quad ل_{ن}\, ل_{۱} = ث - ا_{۱}^{۲}$$

لیکن $ث - ا_{۱}^{۲} = ل_{۱}$، اس لئے $ل_{ن} = ۱$

نیز $ا_{۱} - ا_{ن} < ل_{ن}$ یعنی < ۱، اسلئے $ا_{۱} - ا_{ن} = ۰$ یعنی

$$ا_{ن} = ا_{۱}$$

نیز $ا_{ن} + ا_{۱} = ل_{ن}\, ب_{ن} = ب_{ن}$، اس لئے $ب_{ن} = ۲ا_{۱}$،

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۳۶۲ - ثابت کرو کہ کسی دور میں اول اور آخر سے متساوی الفصل جزوی خارج قسمت باہم مساوی ہوتے ہیں جبکہ آخری جزوی خارج قسمت کو دور میں شمار نہ کیا جائے۔

فرض کرو کہ آخری تکمیل خارج قسمت $\frac{\sqrt{ث}+ا_{ن}}{ل_{ن}}$ ہے، تب

$$ل_{ن} = ۱،\quad ا_{ن} = ا_{۱}،\quad ب_{ن} = ۲ا_{۱}$$

ہم ثابت کرینگے کہ

$$ل_{ن-۱} = ل_{۱}،\quad ا_{ن-۱} = ا_{۲}،\quad ب_{ن-۱} = ب_{۱}$$

$ل_{ن-٢} = ل_٢ ،\ ا_{ن-٢} = ا_٣ ،\ ب_{ن-٢} = ب_٢$

. . . .

ہم جانتے ہیں کہ $ل_{ن-١} = ل_ن ل_{ن-١} = ث - ا_ن^٢ = ث - ا_١^٢ = ل_١$

نیز $ا_{ن-١} + ا_١ = ا_{ن-١} + ا_ن = ل_{ن-١} ب_{ن-١} = ل_١ ب_{ن-١}$

اور $ا_١ + ا_٢ = ل_١ ب_١$

$\therefore ا_٢ - ا_{ن-١} = ل_١ (ب_١ - ب_{ن-١})$

$\therefore \frac{ا_٢ - ا_{ن-١}}{ل_١} = ب_١ - ب_{ن-١} = ٠$ یا کوئی صحیح عدد

لیکن $\frac{ا_٢ - ا_{ن-١}}{ل_١} < \frac{ا_١ - ا_{ن-١}}{ل_١}$ یعنی $< \frac{ا_١ - ا_{ن-١}}{ل_{ن-١}}$ جو ایک سے کم ہے

لہذا $ا_٢ - ا_{ن-١} = ٠$۔ اس لئے $ا_{ن-١} = ا_٢$ اور $ب_{ن-١} = ب_١$

اسی طرح سے $ل_{ن-٢} = ل_٢$، $ا_{ن-٢} = ا_٣$ اور $ب_{ن-٢} = ب_٢$ اور علیٰ ہذالقیاس

۳۶۳ — دفعات ۳۶۱ اور ۳۶۲ کے نتائج سے ظاہر ہے کہ جب درجہ دوم کی کسی مقدار اصم $\sqrt{ث}$ کو مسلسل کسر میں تحویل کیا جائے تو یہ کسر ذیل کی شکل اختیار کرے گی

$$ا_١ + \frac{1}{ب_١+}\ \frac{1}{ب_٢+}\ \frac{1}{ب_٣+}\ \cdots\cdots + \frac{1}{ب_٣+}\ \frac{1}{ب_٢+}\ \frac{1}{ب_١+}\ \frac{1}{٢ا_١+}\ \cdots$$

۳۶۴ — متوالی دوروں کے ماقبل الآخر مستدق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ متوالی دور میں جزوی خارج قسمتوں کی تعداد ن ہے تب متوالی دوروں کے ماقبل الآخر مستدق بالترتیب ن واں، ۲ن واں، ۳ن واں مستدق ہونگے، فرض کرو کہ یہ بالترتیب

$\frac{ق_ن}{ل_ن}$ ، $\frac{ق_{٢ن}}{ل_{٢ن}}$ ، $\frac{ق_{٣ن}}{ل_{٣ن}}$ ..... ہیں

اب $\sqrt{\text{ث}} = \text{ا}_1 + \frac{1}{\text{ب}_1 +} \frac{1}{\text{ب}_2 +} \frac{1}{\text{ب}_3 +} \cdots\cdots \frac{1}{\text{ب}_{\text{ن}-1} +} \frac{1}{2\text{ا}_1 +} \cdots\cdots$

گویا $\frac{\text{ق}_{\text{ن}+1}}{\text{ل}_{\text{ن}+1}}$ کے متناظر جزوی خارج قسمت 2ا_1 ہے، اسلئے

$$\frac{\text{ق}_{\text{ن}+1}}{\text{ل}_{\text{ن}+1}} = \frac{2\text{ا}_1 \text{ق}_\text{ن} + \text{ق}_{\text{ن}-1}}{2\text{ا}_1 \text{ل}_\text{ن} + \text{ل}_{\text{ن}-1}}$$

اس منزل پر پورا خارج قسمت ذیل کے دور پر مشتمل ہے

$$2\text{ا}_1 + \frac{1}{\text{ب}_1 +} \frac{1}{\text{ب}_2 +} \frac{1}{\text{ب}_3 +} \cdots\cdots \frac{1}{\text{ب}_{\text{ن}-1} +} \cdots\cdots$$

اور اس لئے $\text{ا}_1 + \sqrt{\text{ث}}$ کے مساوی ہے، لہذا

$$\sqrt{\text{ث}} = \frac{(\text{ا}_1 + \sqrt{\text{ث}})\,\text{ق}_\text{ن} + \text{ق}_{\text{ن}-1}}{(\text{ا}_1 + \sqrt{\text{ث}})\,\text{ل}_\text{ن} + \text{ل}_{\text{ن}-1}}$$

کسروں سے پاک کرنے اور ناطق اور غیر ناطق حصوں کو جداگانہ مساوی کرنے سے

$$\text{ا}_1 \text{ق}_\text{ن} + \text{ق}_{\text{ن}-1} = \text{ث}\,\text{ل}_\text{ن} \text{،} \quad \text{ا}_1 \text{ل}_\text{ن} + \text{ل}_{\text{ن}-1} = \text{ق}_\text{ن} \cdots\cdots (1)$$

نیز $\frac{\text{ق}_\text{ن}}{\text{ل}_\text{ن}}$ اور $\frac{\text{ق}_{\text{ن}-1}}{\text{ل}_{\text{ن}-1}}$ کی مدد سے

خارج قسمت $2\text{ا}_1 + \frac{1}{\text{ب}_1 +} \frac{1}{\text{ب}_2 +} \cdots\cdots \frac{1}{\text{ب}_{\text{ن}-1}}$

لینے سے جو $\text{ا}_1 + \frac{\text{ق}_\text{ن}}{\text{ل}_\text{ن}}$ کے مساوی ہے $\frac{\text{ق}_{2\text{ن}}}{\text{ل}_{2\text{ن}}}$ کی قیمت

حاصل ہو سکتی ہے۔

پس $\frac{\text{ق}_{۲ن}}{\text{ل}_{۲ن}} = \frac{\left(\text{ا}_۱ + \frac{\text{ق}_ن}{\text{ل}_ن}\right)\text{ق}_ن + \text{ق}_{ن-۱}}{\left(\text{ا}_۱ + \frac{\text{ق}_ن}{\text{ل}_ن}\right)\text{ل}_ن + \text{ل}_{ن-۱}} = \frac{\text{ث}\,\text{ل}_ن + \frac{\text{ق}_ن}{\text{ل}_ن} \times \text{ق}_ن}{\text{ق}_ن + \frac{\text{ق}_ن}{\text{ل}_ن} \times \text{ل}_ن}$ سے ....(۱)

$$\therefore \frac{\text{ق}_{۲ن}}{\text{ل}_{۲ن}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{ق}_ن}{\text{ل}_ن} + \frac{\text{ث}\,\text{ل}_ن}{\text{ق}_ن}\right) \ldots\ldots (۲)$$

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ج ویں متوالی دَور میں ماقبل الآخر مستدق $\frac{\text{ق}_{ج ن}}{\text{ل}_{ج ن}}$ ہو تو

$$\text{ا}_۱\,\text{ق}_{ج ن} + \text{ق}_{ج ن-۱} = \text{ث}\,\text{ل}_{ج ن} \text{، } \text{ا}_۱\,\text{ل}_{ج ن} + \text{ل}_{ج ن-۱} = \text{ق}_{ج ن}$$

اور اِن مساواتوں کو استعمال کرنے سے ہمیں $\frac{\text{ق}_{۳ن}}{\text{ل}_{۳ن}}$ ، $\frac{\text{ق}_{۴ن}}{\text{ل}_{۴ن}}$ ،..... کی قیمتیں یکے بعد دیگرے معلوم ہو سکتی ہیں ۔

طالب علم دیکھ لے کہ مساوات (۲) ن کے تمام اضعاف کے لئے درست رہتی ہے، مثلاً

$$\frac{\text{ق}_{۲ج ن}}{\text{ل}_{۲ج ن}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{ق}_{ج ن}}{\text{ل}_{ج ن}} + \frac{\text{ث}\,\text{ل}_{ج ن}}{\text{ق}_{ج ن}}\right)$$

ثبوت ویسا ہی ہے جو پہلے دیا جا چکا ہے ۔

۳۶۵ ۔ دفعہ ۳۵۶ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک دوری مسلسل کسر ناطق سروں والی مساوات درجہ دوم کی اصل سے تعبیر ہو سکتی ہے ۔ برعکس اس کے دفعہ ۳۵۷ کے طریقہ سے ہم یہ ثابت

کر سکتے ہیں کہ $\frac{\text{ا} + \sqrt{\text{ب}}}{\text{ج}}$ کی شکل کے کسی جملہ کو جس میں ا، ب، ج مثبت صحیح اعداد ہیں اور ب، پورا مربع نہیں ہے ایک متوالی مسلسل کسر میں تحویل کیا جا سکتا ہے، اس صورت میں دوری حصہ بالعموم دوسرے جزوی خارج قسمت سے شروع نہیں ہوگا، نہ ہی آخری جزوی خارج قسمت پہلے سے دگنا ہوگا۔

متوالی مسلسل کسور کے مضمون کے متعلق مزید معلومات حاصل کرنے کے لئے طالب علم کو چاہئے کہ سیرٹ کے اعلیٰ الجبرا کے کورس کا مطالعہ کرے یا طامس بائیٹر صاحب ایم۔ اے ایف۔ آر۔ ایس کی کتاب "درجہ دوم کی مقدار اصم کی تعبیر مسلسل کسروں میں" ملاحظہ کرے۔

امثلہ نمبری ۲۷ (ب)

ذیل کی مقادیر اصم کو مسلسل کسور کی شکل میں بیان کرو اور ہر ایک کا چوتھا مستدق معلوم کرو

۱۔ $\sqrt{\text{ا}^2 + 1}$ ۲۔ $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ا}}$ ۳۔ $\sqrt{\text{ا}^2 - 1}$

۴۔ $\sqrt{1 + \frac{1}{\text{ا}}}$ ۵۔ $\sqrt{\text{ا}^2 + \frac{2\text{ا}}{\text{ب}}}$ ۶۔ $\sqrt{\text{ا}^2 - \frac{\text{ا}}{\text{ن}}}$

۷۔ ثابت کرو کہ $\sqrt{9\text{ا}^2 + 3} = 3\text{ا} + \frac{1}{2\text{ا}+}\;\frac{1}{6\text{ا}+}\;\frac{1}{2\text{ا}+}\;\frac{1}{6\text{ا}+}\cdots$

اور پانچواں مستدق معلوم کرو۔

۸۔ ثابت کرو کہ

$$\sqrt{\text{ق}^2 + 4\text{ق}} = \text{ق} + \frac{2}{1+}\;\frac{1}{\text{ق}+}\;\frac{1}{1+}\;\frac{1}{\text{ق}+}\;\frac{1}{1+}\cdots$$

۹۔ ثابت کرو کہ

$$ق\left(ا_1 + \frac{1}{ق\,ل\,ا_2+}\;\frac{1}{ا_3+}\;\frac{1}{ق\,ل\,ا_4+}\cdots\cdots\right)$$

$$= ق\,ا_1 + \frac{1}{ل\,ا_2+}\;\frac{1}{ق\,ا_3+}\;\frac{1}{ل\,ا_4+}\cdots\cdots$$

۱۰۔ اگر $\sqrt{ا^2+1}$ کو مسلسل کسر کی شکل میں لایا جائے تو ثابت کرو کہ

$$2\left(ا^2+1\right)ل_ن = ق_{ن-1} + ق_{ن+1}$$

$$2\,ق_ن = ل_{ن-1} + ل_{ن+1}$$

۱۱۔ اگر $لا = \frac{1}{ا_1+}\;\frac{1}{ا_2+}\;\frac{1}{ا_1+}\;\frac{1}{ا_2+}\cdots\cdots$

$$ما = \frac{1}{2ا_1+}\;\frac{1}{2ا_2+}\;\frac{1}{2ا_1+}\;\frac{1}{2ا_2+}\cdots\cdots$$

$$ی = \frac{1}{3ا_1+}\;\frac{1}{3ا_2+}\;\frac{1}{3ا_1+}\;\frac{1}{3ا_2+}\cdots\cdots$$

تو ثابت کرو کہ $لا\left(ما^2-ی^2\right)+2ما\left(ی^2-لا^2\right)+3ی\left(لا^2-ما^2\right)=0$

۱۲۔ ثابت کرو کہ

$$\left(ا+\frac{1}{ب+}\;\frac{1}{ا+}\;\frac{1}{ب+}\;\frac{1}{ا+}\cdots\right)\left(\frac{1}{ب+}\;\frac{1}{ا+}\;\frac{1}{ب+}\;\frac{1}{ا+}\cdots\right)=\frac{ا}{ب}$$

۱۳۔ اگر $لا = ا + \frac{1}{ب+}\;\frac{1}{ب+}\;\frac{1}{ا+}\;\frac{1}{ا+}\cdots\cdots$

$$ما = ب + \frac{1}{ا+}\;\frac{1}{ا+}\;\frac{1}{ب+}\;\frac{1}{ب+}\cdots\cdots$$

تو ثابت کرو کہ $(ا ب^{۲} + ا + ب)\,لا - (ا^{۲} ب + ا + ب)\,ما = ا^{۲} - ب^{۲}$

۱۴۔ اگر $\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$، $\sqrt{ا^{۲} + ۱}$ کا ن واں مستدق ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ق_{۱}^{۲} + ق_{۲}^{۲} + \cdots + ق_{ن+۱}^{۲}}{ل_{۱}^{۲} + ل_{۲}^{۲} + \cdots + ل_{ن+۱}^{۲}} = \frac{ق_{ن+۱}\,ق_{ن+۲} - ق_{۱}\,ق_{۲}}{ل_{ن+۱}\,ل_{ن+۲} - ل_{۱}\,ل_{۲}}$$

۱۵۔ ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{۱}{ا+}\;\frac{۱}{ب+}\;\frac{۱}{ج+}\cdots\right)\left(ج + \frac{۱}{ب+}\;\frac{۱}{ا+}\;\frac{۱}{ج+}\cdots\right) = \frac{۱ + ب ج}{۱ + ا ب}$$

۱۶۔ اگر $\frac{ق_{ر}}{ل_{ر}}$، $\frac{\sqrt{۵} + ۱}{۲}$ کے ر' ویں مستدق کو تعبیر کرے، تو ثابت کرو کہ

$$ق_{۳} + ق_{۵} + \cdots + ق_{۲ن-۱} = ق_{۲ن} - ق_{۲}$$

$$ل_{۳} + ل_{۵} + \cdots + ل_{۲ن-۱} = ل_{۲ن} - ل_{۲}$$

۱۷۔ ثابت کرو کہ لامتناہی مسلسل کسور

$$\frac{۱}{ا+}\;\frac{۱}{ب+}\;\frac{۱}{ج+}\cdots \quad \text{اور} \quad \frac{۱}{ب+}\;\frac{۱}{ا+}\;\frac{۱}{ج+}\cdots$$

کا فرق $\frac{ا - ب}{۱ + ا ب}$ کے مساوی ہے۔

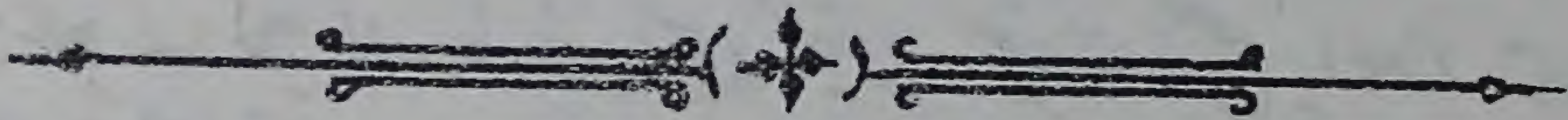
۱۸۔ اگر $\sqrt{ث}$ کو مسلسل کسر میں تحویل کیا جائے اور اگر اسکے دور میں خارج قسمتوں کی تعداد ن ہو، تو ثابت کرو کہ

$$ل_{ن} = ٢\, ق_{ن}\, ل_{ن}$$

$$ق_{٢ن} = ٢\, ق_{ن}^{٢} + (-١)^{ن+١}$$

۱۹- اگر $\sqrt{ث}$ کو مسلسل کسر میں تحویل کیا جائے اور اگر پہلے، دوسرے، تیسرے.... ک ویں متوالی دَور میں ماقبل الآخر مستدقوں کو بالترتیب $ن_{١}$، $ن_{٢}$ ...... $ن_{ک}$ سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ن_{ک} + \sqrt{ث}}{ن_{ک} - \sqrt{ث}} = \left(\frac{ن_{١} + \sqrt{ث}}{ن_{١} - \sqrt{ث}}\right)^{ک}$$



اٹھائیسواں باب

درجۂ دوم کی غیر معیّن مساواتیں

۳۶۶ - جن غیر معیّن مساواتوں کا درجہ ایک سے زیادہ ہو اُن کا حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرنا اگرچہ عملی طور پر زیادہ سوٗد مند نہیں لیکن اس کا جو تعلق اعداد کے نظریہ کے ساتھ ہے اس کی وجہ سے دلچسپ ضرور ہے۔ اس باب میں ہم صرف دو متغیروں کی معادلات درجہ دوم پر بحث کرینگے۔

۳۶۷ - لا اور ما کی ایسی قیمتیں مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو جو مساوات

$$\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 + 2\,\text{گ}\,\text{لا} + 2\,\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = 0$$

کو پورا کریں جہاں ا، ب، ج، ف، گ، ھ صحیح اعداد ہیں۔

اس مساوات کو لا میں درجہ دوم کی ایک مساوات فرض کرکے اسکو دفعہ ۱۲۷ کے مطابق حل کرنے سے

$$\text{ا}\,\text{لا} + \text{ھ}\,\text{ما} + \text{گ} = \pm\sqrt{(\text{ھ}^2 - \text{ا}\,\text{ب})\,\text{ما}^2 + 2(\text{ھ}\,\text{گ} - \text{ا}\,\text{ف})\,\text{ما} + (\text{گ}^2 - \text{ا}\,\text{ج})} \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

اب اگر لا اور ما کی قیمتیں مثبت صحیح اعداد ہوں تو ضرور ہے کہ علامتِ جذر کے اندر کا جملہ جوق $\text{ما}^2 + 2\,\text{ل}\,\text{ما} + \text{ر}$ سے تعبیر ہو سکتا ہے پورا مربع ہو، یعنی فرض کرو کہ

$$\text{ق}\,\text{ما}^{2} + ۲\,\text{ل}\,\text{ما} + \text{ر} = \text{ی}^{2}$$

اِس کو ما میں مساوات درجہ دوم سمجھہ کر حل کرنے سے

$$\text{ق}\,\text{ما} + \text{ل} = \pm\sqrt{\text{ل}^{2} - \text{ق}\,\text{ر} + \text{ق}\,\text{ی}^{2}}$$

حسب سابق علامت جذر کے اندر کا جملہ پورا مربع ہونا چاہیے۔ فرض کرو کہ یہ ت^{2} کے مساوی ہے، تب

$$\text{ت}^{2} - \text{ق}\,\text{ی}^{2} = \text{ل}^{2} - \text{ق}\,\text{ر}$$

جہاں ت اور ی متغیر ہیں اور ق، ل، ر مستقل ہیں۔

ابتدائی مساوات کو مثبت صحیح اعداد میں حل کرنا اُسی صورت میں ممکن ہوسکتا ہے جبکہ مندرجۂ بالا مساوات کا مثبت صحیح اعداد میں حل کرنا ممکن ہو۔ اس مبحث کی طرف ہم دفعہ ۲۷۴ میں رجوع کرینگے۔

اگر ا، ب، ھ سب مثبت ہوں تو یہ ظاہر ہے کہ حلوں کی تعداد محدود ہوگی کیونکہ لا اور ما کی بڑی قیمتوں کے لئے دائیں جانب کے رکن کی علامت $\text{ا}\,\text{لا}^{2} + ۲\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^{2}$ کی علامت پہ موقوف ہوگی (دیکھو دفعہ ۲۶۹) اور اس لئے لا اور ما کی بڑی قیمتوں کے لئے جو مثبت صحیح اعداد ہوں یہ صفر کے مساوی نہیں ہوسکتی۔

نیز اگر $\text{ھ}^{2} - \text{ا}\,\text{ب}$ منفی ہو تو (۱) میں ما^{2} کا سر منفی ہوگا اور اسی قسم کے استدلال سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ حلوں کی تعداد محدود ہوگی۔

مثال۔ مثبت صحیح اعداد میں مساوات

$$\text{لا}^{2} - ۴\,\text{لا}\,\text{ما} + ۶\,\text{ما}^{2} - ۲\,\text{لا} - ۲۰\,\text{ما} = ۲۹$$

کے حل معلوم کرو۔

اس کو لا میں درجۂ دوم کی ایک مساوات سمجھ کر حل کرنے سے

$$لا = ۲ ما + ۱ \pm \sqrt{۳۰ + ۲۴ ما - ۲ ما^{۲}}$$

لیکن $۳۰ + ۲۴ ما - ۲ ما^{۲} = ۱۰۲ - ۲ (ما - ۶)^{۲}$، پس $(ما - ۶)^{۲}$، ۵۱ سے بڑا نہیں ہو سکتا۔ جانچ کرنے سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ علامتِ جذر کے اندر کی رقم پورا مربع ہوگی جبکہ $(ما - ۶)^{۲} = ۱$ یا ۴۹، لہذا ما کی مثبت صحیح عددی قیمتیں ۵، ۷، ۱۳ ہیں۔

جب ما = ۵، لا = ۲۱ یا ۱
جب ما = ۷، لا = ۲۵ یا ۵
جب ما = ۱۳، لا = ۲۹ یا ۲۵

۳۶۸ - ہم اوپر دیکھ چکے ہیں کہ مثبت صحیح اعداد میں مساوات

$$ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$$

کے حلوں کو ایک ایسی مساوات کے حلوں پر موقوف کر سکتے ہیں جس کی شکل

$$لا^{۲} \pm ث ما^{۲} = \pm ا$$

ہو جہاں ث اور ا مثبت صحیح اعداد ہیں۔

مساوات $لا^{۲} + ث ما^{۲} = - ا$ کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اور مساوات $لا^{۲} + ث ما^{۲} = ا$ کے حلوں کی تعداد محدود ہے جو آزمائش سے معلوم ہو سکتے ہیں، اس لئے ہم صرف اُن مساواتوں پر بحث کرینگے جنکی شکل $لا^{۲} - ث ما^{۲} = \pm ا$ ہو۔

۳۶۹ - ثابت کرو کہ مساوات $لا^{۲} - ث ما^{۲} = ۱$ کو ہمیشہ مثبت صحیح عددوں میں حل کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ $\sqrt{ث}$ کو ایک مسلسل کسر کی شکل میں تحویل کرلیا

گیا ہے اور $\frac{ق}{ل}$، $\frac{قَ}{لَ}$، $\frac{قً}{لً}$ کوئی سے تین مسلسل مستدق ہیں۔

نیز فرض کرو کہ مستدق $\frac{قً}{لً}$ کے جواب میں تکمل خارج قسمت $\frac{\sqrt{ث} + لن}{لن}$ ہے، تب

$$لن (قً لَ - قَ لً) = ث لَ^۲ - قَ^۲ \ldots\ldots$$ [دفعہ ۳۵۸]

لیکن ہر ایک دور کے آخر میں $لن = ۱ \ldots\ldots$ [دیکھو دفعہ ۳۶۱]

$$\therefore قَ^۲ - ث لَ^۲ = قَ ل - ق لَ$$

جہاں $\frac{قَ}{لَ}$ کسی متوالی دور کا ماقبل الآخر مستدق ہے۔

اگر دور میں خارج قسمتوں کی تعداد جفت ہو تو $\frac{قَ}{لَ}$ جفت مستدق ہے اور اسلئے $\sqrt{ث}$ سے بڑا ہے اور بنا بریں $\frac{ق}{ل}$ سے بھی بڑا ہے۔ پس $قَ ل - ق لَ = ۱$، اس صورت میں $قَ^۲ - ث لَ^۲ = ۱$، لہٰذا لا = قَ اور ما = لَ مساوات $لا^۲ - ث ما^۲ = ۱$ کا حل ہے۔

چونکہ $\frac{قَ}{لَ}$ ہر ایک متوالی دور کا ماقبل الآخر مستدق ہے، اس لئے حلوں کی تعداد محدود ہے۔

اگر دور میں خارج قسمتوں کی تعداد طاق ہو تو پہلے دور کا ماقبل الآخر مستدق طاق والا مستدق ہوگا لیکن دوسرے

دَور کا ماقبل الآخر مستدق جفت واں مستدق ہے پس لا = قَ، ما = لَ رکھنے سے صحیح عددی حل حاصل ہوں گے جہاں $\frac{\text{قَ}}{\text{لَ}}$ دوسرے، چوتھے، چھٹے ..... متوالی دَور کا ماقبل الآخر مستدق ہے۔

لہٰذا اس صورت میں بھی حلوں کی تعداد غیر محدود ہے۔

۳۷۰ ـ مثبت صحیح اعداد میں مساوات $\text{لا}^{۲} - \text{ث}\,\text{ما}^{۲} = -۱$ کا حل معلوم کرو۔

دفعہ ماقبل کی طرح

$$\text{قَ}^{۲} - \text{ث}\,\text{لَ}^{۲} = \text{قَ}\,\text{ل} - \text{ق}\,\text{لَ}$$

اگر دَور میں خارج قسمتوں کی تعداد طاق ہو اور $\frac{\text{قَ}}{\text{لَ}}$ کسی متوالی دَور کا طاق واں ماقبل الآخر مستدق ہو تو $\frac{\text{قَ}}{\text{لَ}} < \frac{\text{ق}}{\text{ل}}$، اس لئے $\text{قَ}\,\text{ل} - \text{ق}\,\text{لَ} = -۱$ اس صورت میں $\text{قَ}^{۲} - \text{ث}\,\text{لَ}^{۲} = -۱$ اور مساوات $\text{لا}^{۲} - \text{ث}\,\text{ما}^{۲} = -۱$ کے صحیح عددی حل لا = قَ، ما = لَ رکھنے سے حاصل ہو سکتے ہیں جہاں $\frac{\text{قَ}}{\text{لَ}}$ پہلے، تیسرے، پانچویں، ..... متوالی دَور کا ماقبل الآخر مستدق ہے۔

مثال ـ $\text{لا}^{۲} - ۱۳\,\text{ما}^{۲} = \pm ۱$ کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو

ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ

$$\sqrt{۱۳} = ۳ + \frac{۱}{۱+}\;\frac{۱}{۱+}\;\frac{۱}{۱+}\;\frac{۱}{۱+}\;\frac{۱}{۶+}\;\ldots\ldots$$

یہاں دَور میں خارج قسمتوں کی تعداد طاق ہے، پہلے دَور میں ماقبل الآخر مستدق $\frac{۱۸}{۵}$ ہے، پس لا = ۱۸، ما = ۵ مساوات

لا^۲ - ۱۳ ما^۲ = -۱

کا ایک حل ہے۔
دفعہ ۳۶۴ کی رُو سے دُوسرے متوالی دَور کا ماقبل الآخر مستدق

۱/۲ (۱۸/۵ + ۵/۱۸ × ۱۳) یعنی ۶۴۹/۱۸۰

ہے، اس لئے لا = ۶۴۹، ما = ۱۸۰ مساوات

لا^۲ - ۱۳ ما^۲ = ۱

کا حل ہے۔
اس طرح متوالی دَوروں کے مسلسل ماقبل الآخر مستدق بنانے سے ہم مساواتوں

لا^۲ - ۱۳ ما^۲ = -۱ اور لا^۲ - ۱۳ ما^۲ = ۱

کے جتنے حل چاہیں معلوم کرسکتے ہیں۔

۳۷۱۔ جب مساوات لا^۲ - ث ما^۲ = ۱ کا ایک حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرلیا جائے تو ذیل کے طریقہ سے ہم جتنے اور حل چاہیں معلوم کرسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ لا = ھ، ما = ک ایک حل ہے جہاں ھ، ک مثبت صحیح اعداد ہیں، تب (ھ^۲ - ث ک^۲)^ش = ۱ جہاں ش کوئی مثبت صحیح عدد ہے،

پس لا^۲ - ث ما^۲ = (ھ^۲ - ث ک^۲)^ش

∴ (لا + ما √ث)(لا - ما √ث) = (ھ + ک √ث)^ش (ھ - ک √ث)^ش

لا + ما √ث = (ھ + ک √ث)^ش اور لا - ما √ث = (ھ - ک √ث)^ش رکھو

∴ ۲ لا = (ھ + ک √ث)^ش + (ھ - ک √ث)^ش

۲ ما $\sqrt{ث}$ = (ھ + ک $\sqrt{ث}$)^ث^ − (ھ − ک $\sqrt{ث}$)^ث^

لا اور ما کی جو قیمتیں اس طرح معلوم ہوتی ہیں وہ مثبت صحیح اعداد ہیں اور ث کو بالتسلسل ۱، ۲، ۳، ..... قیمتیں دینے سے ہم جتنے حل چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔

اسی طرح سے اگر لا = ھ، ما = ک مساوات لا۲ − ث ما۲ = −۱ کا ایک حل ہو اور ث کوئی طاق مثبت صحیح عدد ہو

تو لا۲ − ث ما۲ = (ھ۲ − ث ک۲)^ث^

پس لا اور ما کی قیمتیں وہی ہیں جو پہلے معلوم کی جا چکی ہیں لیکن ث کی قیمتیں ۱، ۳، ۵ ..... تک محدود ہیں۔

۳۷۲ − لا = ۲ لا، ما = ۲ ما رکھنے سے مساوات لا۲ − ث ما۲ = ± ۲۲ ہو جاتی ہے لا۲ − ث ما۲ = ± ۱ اور ہم پہلے بتا چکے ہیں کہ اس کو کس طرح حل کرنا چاہئے۔

۳۷۳ − ہم دفعہ ۳۶۹ میں دیکھ چکے ہیں کہ

ق۲ − ث ل۲ = − ر (ق ل − ق ل) = ± ر

لہٰذا $\sqrt{ث}$ کو تناظر کسر مسلسل میں تحویل کرنے سے اگر اس کسر کے کسی مکمل خارج قسمت کا نسب نما ۱ ہو اور اس مکمل خارج قسمت کی بجائے جزوی خارج قسمت لینے سے جو متدق حاصل ہو وہ $\frac{ق}{ل}$ ہو

تو مساواتات لا۲ − ث ما۲ = ± ۱ میں سے ایک مساوات لا = ق اور ما = ل سے پوری ہو گی۔

نیز طاق متدق سب $\sqrt{ث}$ سے کم ہیں اور جفت متدق

سب √ثَ سے بڑے ہیں، پس اگر قَ/لَ کوئی جفت مستدق ہو تو

لا = قَ اور ما = لَ مساوات لا² - ث ما² = ۱

کا ایک حل ہے اور اگر قَ/لَ کوئی طاق مستدق ہو تو

لا = قَ اور ما = لَ مساوات لا² - ث ما² = -۱ کا ایک حل ہے

۳۷۴- دفعہ ماقبل میں جو طریقہ بتایا گیا ہے اس کی مدد سے مساواتوں لا² - ث ما² = ± ۱ میں سے ایک کا حل معلوم ہو سکتا ہے جہاں ۱ ان نسب نماؤں میں سے ایک ہے جو √ثَ کو مسلسل کسر میں تحویل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً اگر ہم √۷ کو مسلسل کسر میں تحویل کریں تو ہمیں معلوم ہوگا کہ

√۷ = ۲ + ۱/(۱+) ۱/(۱+) ۱/(۱+) ۱/(۴+) ....

اور مکمل خارج قسمتوں کے نسب نما ۳، ۲، ۳، ۱ ہیں۔

متواتر مستدق

۲/۱، ۳/۱، ۵/۲، ۸/۳، ۳۷/۱۴، ۴۵/۱۷، ۸۲/۳۱، ۱۲۷/۴۸، ....

ہیں اور اگر ہم مساواتوں

لا² - ۷ ما² = -۳، لا² - ۷ ما² = ۲، لا² - ۷ ما² = -۳، لا² - ۷ ما² = ۱

کا دور لیں تو ہمیں معلوم ہوگا کہ یہ مساواتیں

لا کی قیمتوں ۲، ۳، ۵، ۸، ۳۷، ۴۵، ۸۲، ۱۲۷، ....

اور ما کی تناظر قیمتوں ۱، ۱، ۲، ۳، ۱۴، ۱۷، ۳۱، ۴۸، ..... سے

پوری ہوتی ہیں۔

۳۷۵- اس سے ظاہر ہے کہ بہت محدود صورتوں میں مساواتوں

لا^{2} - ث ما^{2} = ± ا کے حل یقینی طور پر صحیح عددوں میں معلوم ہو سکتے ہیں تاہم کسی عددی مثال میں بعض اوقات ایسا ہوتا ہے کہ ہم محض جانچ یا آزمایش سے مساواتوں لا^{2} - ث ما^{2} = ± ا کا ایک حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کر لیتے ہیں جبکہ ا مندرجہ بالا نسب نماؤں میں سے نہ ہو۔ مثلاً ہم آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں کہ مساوات لا^{2} - ۷ ما^{2} = ۵۳، لا = ۹، ما = ۲ سے پوری ہوتی ہے، جب ایک حل معلوم ہو جائے تو حلوں کی کوئی تعداد معلوم ہو سکتی ہے جیسا کہ ذیل کی دفعہ میں بتایا گیا ہے۔

۳۷۶ - فرض کرو کہ لا = ف، ما = گ، مساوات لا^{2} - ث ما^{2} = ا کا ایک حل ہے، نیز فرض کرو کہ مساوات لا^{2} - ث ما^{2} = ا کا ایک حل لا = ھ، ما = ک ہے۔ تب

لا^{2} - ث ما^{2} = (ف^{2} - ث گ^{2})(ھ^{2} - ث ک^{2})

= (ف ھ ± ث گ ک)^{2} - ث (ف ک ± گ ھ)^{2}

لا = ف ھ ± ث گ ک اور ما = ف ک ± گ ھ رکھنے سے اور ھ، ک کو انکی قیمتیں جو دفعہ ۳۷۱ کے مطابق معلوم کی جا سکتی ہیں دینے سے حلوں کی کوئی تعداد معلوم ہو سکتی ہے۔

۳۷۷ - اب تک ہم نے یہ فرض کیا ہے کہ ث پورا مربع نہیں ہے اگر ث پورا مربع ہو تو مساوات کی شکل لا^{2} - ث^{2} ما^{2} = ا ہو جاتی ہے، جس کو ذیل کے طریقہ سے فوراً حل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ا = ب ج جہاں ب اور ج دو مثبت صحیح اعداد ہیں جن میں ب بڑا ہے، تب

(لا + ث ما)(لا - ث ما) = ب ج

رکھو لا + ث ما = ب اور لا - ث ما = ج، اگر لا اور ما کی وہ قیمتیں جو ان مساواتوں سے حاصل ہوں صحیح اعداد ہوں تو ب اور ج کو سب ممکن قیمتیں دینے سے باقی حل معلوم ہو سکتے ہیں۔

مثال۔ دو مثبت صحیح اعداد معلوم کرو جن کے مربعوں کا فرق ۶۰ ہو۔

فرض کرو کہ لا اور ما مطلوبہ اعداد ہیں، تب $لا^2 - ما^2 = ۶۰$

یعنی (لا + ما) (لا - ما) = ۶۰

اب ۶۰ ذیل کے زوجوں میں سے ہر ایک کے حاصل ضرب کے مساوی ہے

۶۰ × ۱، ۳۰ × ۲، ۲۰ × ۳، ۱۵ × ۴، ۱۲ × ۵، ۱۰ × ۶

اور مطلوبہ قیمتیں مساواتوں

لا + ما = ۳۰   لا + ما = ۱۰
لا - ما = ۲   اور   لا - ما = ۶

سے معلوم ہو سکتی ہیں، باقی مساواتوں سے لا، ما کی جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ کسری ہیں۔

پس اعداد مطلوبہ ۱۶، ۱۴ اور ۸، ۲ ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اسی طرح سے ہم مساوات

$ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ک$

کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کر سکتے ہیں جبکہ دائیں جانب کے رکن کو دو ناطق خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا ممکن ہو۔

۳۷۸ - اگر عام مساوات میں ا یا ب یا دونوں صفر ہوں تو دفعہ ۳۷۶ کا طریقہ استعمال کرنے کی بجائے ذیل کی مثال کے مطابق عمل کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔

مثال۔ مثبت صحیح اعداد میں حل کرو

۲ لا ما - ۴ لا^2 + ۱۲ لا - ۵ ما = ۱۱
ما کو لا کی رقوم میں بیان کرو۔

ما = (۴ لا^2 - ۱۲ لا + ۱۱) ÷ (۲ لا - ۵) = ۲ لا - ۱ + ۶ ÷ (۲ لا - ۵)

اگر ما کوئی صحیح عدد ہو تو ۶ ÷ (۲ لا - ۵) بھی صحیح عدد ہوگا لہٰذا
۲ لا - ۵ لازماً ± ۱ کے یا ± ۲، یا ± ۳ کے یا ± ۶ کے مساوی ہوگا
± ۲ اور ± ۶ کی صورتیں صریحاً ناقابل تسلیم ہیں، اور لا کی
قابل قبول قیمتیں صرف ۲ لا - ۵ = ± ۱ اور ۲ لا - ۵ = ± ۳
سے حاصل ہوتی ہیں جو ۳، ۲، ۴، ۱ ہیں۔
ان قیمتوں کو یکے بعد دیگرے لینے سے ہمیں حسب ذیل حل
حاصل ہوتے ہیں
لا = ۳، ما = ۱۱؛ لا = ۲، ما = -۳؛ لا = ۴، ما = ۹؛ لا = ۱، ما = -۱۔
پس قابل قبول حل صرف لا = ۳، ما = ۱۱ اور لا = ۴، ما = ۹ ہیں

۳۷۹۔ اس اصول کی مدد سے جو ابھی مذکور ہوا ہم معلوم
کرسکتے ہیں کہ متغیروں کی کن قیمتوں کے لئے لا اور ما کا کوئی
دیا ہوا تفاعل درجۂ اول یا دوم پورا مربع ہوسکتا ہے۔
اس قسم کے سوالوں کو بعض اوقات دافنطین کے سوالات
کہتے ہیں کیونکہ ان پر پہلے پہل یونان کے ایک ریاضی داں
دافنطین نامی نے چوتھی صدی عیسوی میں بحث کی تھی۔

مثال ۱۔ دو مثبت صحیح اعداد ایسے ہیں کہ اگر ان کے مربعوں
کے حاصل جمع میں سے ان کا حاصل ضرب تفریق کیا جائے تو
حاصل تفریق پورا مربع ہوتا ہے، ان اعداد کے لئے عام جملے
معلوم کرو۔

مطلوبہ اعداد کو لا، ما سے تعبیر کرو

$$لا^{۲} - لا\,ما + ما^{۲} = ی^{۲} \quad (\text{فرض کرو})$$

$$\therefore \; لا\,(لا - ما) = ی^{۲} - ما^{۲}$$

یہ مساوات مفروضات

$$م\,لا = ن\,(ی + ما) \quad \text{اور} \quad ن\,(لا - ما) = م\,(ی - ما)$$

سے پوری ہوتی ہے جہاں م اور ن مثبت صحیح اعداد ہیں۔

$$\text{لہٰذا} \quad م\,لا - ن\,ما - ن\,ی = ۰$$

$$\text{اور} \quad ن\,لا + (م - ن)\,ما - م\,ی = ۰$$

ضرب چلیپائی سے اِن مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{لا}{۲\,م\,ن - ن^{۲}} = \frac{ما}{م^{۲} - ن^{۲}} = \frac{ی}{م^{۲} - م\,ن + ن^{۲}}$$

اور چونکہ مساوات زیر بحث متجانس ہے، اس لئے ہم اسکے عام حل

$$لا = ۲\,م\,ن - ن^{۲}،\; ما = م^{۲} - ن^{۲}،\; ی = م^{۲} - م\,ن + ن^{۲}$$

لے سکتے ہیں۔ یہاں م اور ن دو مثبت صحیح اعداد ہیں۔ جن میں سے م بڑا ہے مثلاً اگر م = ۷، ن = ۴ تو

$$لا = ۴۰،\; ما = ۳۳،\; ی = ۳۷$$

مثال ۲۔ تین مثبت صحیح اعداد سلسلۂ حسابیہ میں ہیں اور یہ عدد ایسے ہیں کہ اِن میں سے ہر دو کا مجموعہ پورا مربع ہے، اِن کے لئے عام حلے معلوم کرو۔

اِن اعداد کو لا ـ ما، لا، لا + ما سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ

$$۲\,لا - ما = ق^{۲}،\; ۲\,لا = ل^{۲}،\; ۲\,لا + ما = ر^{۲}$$

$$\text{تب} \quad ق^{۲} + ر^{۲} = ۲\,ل^{۲}$$

یا $ر^{۲} - ل^{۲} = ل^{۲} - ق^{۲}$

یہ مساوات ذیل کے مفروضات

$$م (ر - ل) = ن (ل - ق)، \quad ن (ر + ل) = م (ل + ق)$$

سے پوری ہوتی ہے جہاں م اور ن مثبت صحیح اعداد ہیں۔
ضرب چلیپائی سے ہمیں اِن مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ق}{ن^{۲} + ۲م ن - م^{۲}} = \frac{ل}{م^{۲} + ن^{۲}} = \frac{ر}{م^{۲} + ۲م ن - ن^{۲}}$$

پس عام حل

$$ق = ن^{۲} + ۲م ن - م^{۲}، \quad ل = م^{۲} + ن^{۲}، \quad ر = م^{۲} + ۲م ن - ن^{۲}$$

لے سکتے ہیں جہاں

$$لا = \frac{۱}{۲} (م^{۲} + ن^{۲})^{۲}، \quad ما = ۴م ن (م^{۲} - ن^{۲})$$

اور پھر تین صحیح اعداد مطلوبہ آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں۔
لا کی قیمت سے ظاہر ہے کہ م اور ن یا دونوں جفت ہیں یا دونوں طاق۔ نیز اِن کی قیمتیں ایسی ہونی چاہئیں

کہ $لا > ما$ یعنی $(م^{۲} + ن^{۲})^{۲} > ۸ م ن (م^{۲} - ن^{۲})$

یعنی $م^{۳} (م - ۸ن) + ۲م^{۲} ن^{۲} + ۸ م ن^{۳} + ن^{۴} > ۰$

یہ شرط پوری ہوتی ہے اگر $م > ۸ن$

اگر م = ۹، ن = ۱ تو لا = ۳۳۶۲، ما = ۲۸۸۰ اور اعداد ہیں ۴۸۲، ۳۳۶۲، ۶۲۴۲، اِن میں سے دو دو کے حاصل جمع ۳۸۴۴، ۶۷۲۴ اور ۹۶۰۴ ہیں جو بالترتیب ۶۲، ۸۲، ۹۸ کے مربعے ہیں۔

امثلہ نمبری ۲۸

ذیل کی مساواتوں کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو۔

۱- ۵ لا^{۲} - ۱۰ لا ما + ۷ ما^{۲} = ۷۷

۲- ۷ لا^{۲} - ۲ لا ما + ۳ ما^{۲} = ۲۷

۳- ما^{۲} - ۴ لا ما + ۵ لا^{۲} - ۱۰ لا = ۴

۴- لا ما - ۲ لا - ما = ۸ ۵- ۳ لا + ۳ لا ما - ۴ ما = ۱۴

۶- ۴ لا^{۲} - ما^{۲} = ۳۱۵

ذیل کی مساواتوں میں سے ہر ایک کا چھوٹے سے چھوٹا حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو۔

۷- لا^{۲} - ۱۴ ما^{۲} = ۱ ۸- لا^{۲} - ۱۹ ما^{۲} = ۱

۹- لا^{۲} = ۱۴ ما^{۲} - ۱ ۱۰- لا^{۲} - ۶۱ ما^{۲} + ۵ = ۰

۱۱- لا^{۲} - ۷ ما^{۲} - ۹ = ۰

ذیل کی مساواتوں میں سے ہر ایک کا عام سے عام مثبت صحیح عددی حل معلوم کرو۔

۱۲- لا^{۲} - ۲ ما^{۲} = ۱ ۱۳- لا^{۲} - ۵ ما^{۲} = ۱

۱۴- لا^{۲} - ۱۷ ما^{۲} = -۱

لا اور ما کی ایسی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو جن سے ذیل کا ہر ایک جملہ پورا مربع بن جائے۔

۱۵- لا^{۲} - ۳ لا ما + ۳ ما^{۲} ۱۶- لا^{۲} + ۲ لا ما + ۲ ما^{۲}

۱۷- ۵ لا^{۲} + ما^{۲}

۱۸- دو مثبت صحیح عدد ایسے معلوم کرو کہ اُن میں سے ایک کا مربع دوسرے کے مربع سے بقدر ۱۰۵ کے بڑا ہو۔

۱۹- تین ایسے عددوں کے لئے عام سے عام ضابطہ معلوم

کرو جن سے قائم الزاویہ مثلث کے اضلاع کے طول تعبیر ہو سکتے ہیں۔

۲۰۔ دو مثبت صحیح عدد ایسے ہیں کہ اگر اُن کے مربعوں کے مجموعہ میں اُن کا حاصل ضرب جمع کردیا جائے تو کل مجموعہ پورا مربع ہوتا ہے، اِن عددوں کے لئے عام ضابطہ معلوم کرو۔

۲۱۔ میرے پاس تین نئے شادی شدہ آدمی مع اپنی بیویوں کے ملنے کے لئے آئے مردوں کے نام دیوی دیال، متھرا داس اور رام گوپال تھے اور عورتوں کے بسنتی، کیسری اور پاہاچھمی لیکن مجھے یہ معلوم نہیں کہ ہر مرد کی بیوی کا نام کیا ہے۔ انہوں نے مجھ سے کہا کہ وہ سب بازار میں گائے کے بچھڑے خریدنے گئے تھے اور ہر ایک نے اتنے بچھڑے خریدے جتنے کہ ایک بچھڑے کے لئے شلنگ ادا کئے۔ دیوی دیال نے کیسری کی نسبت ۲۳ بچھڑے زیادہ خرید کئے اور متھرا داس نے بسنتی کی نسبت ۱۱ زیادہ خریدے۔ نیز ہر ایک آدمی نے اپنی بیوی کی نسبت ۳ گنی زیادہ خرچ کئے، میں ہر ایک مرد کی بیوی کا نام جداگانہ معلوم کرنا چاہتا ہوں۔

۲۲۔ اگر $\frac{1}{2}$ ۲ کے کسی طاق مستدق کا شمار کنندہ ک ہو اور کسی جفت مستدق کا شمار کنندہ ک ہو تو ثابت کرو کہ پہلے $ک^2$ یا $ک^2 - 1$ طبعی اعداد کا حاصل جمع پورا مربع ہوگا۔



اٹھتیسواں باب

سلسلوں کو جمع کرنا

۳۸۰۔ ابواب ماقبل میں بعض قسم کے سلسلوں کے جمع کرنے کی مثالیں درج کیجا چکی ہیں۔ سلسلوں کے جمع کرنے کے متعلق جن طریقوں کی تفصیل پہلے آچکی ہے وہ حسب ذیل ہیں :-

(۱) سلسلۂ حسابیہ باب ۴
(۲) سلسلۂ ہندسیہ باب ۵
(۳) وہ سلسلے جو جزوی طور پر حسابیہ اور جزوی طور پر ہندسیہ ہوتے ہیں ۔ دفعہ ۶۰
(۴) طبعی اعداد کی قوتوں اور ان کے متعلقہ سلسلوں کے حاصل جمع دفعات ۶۸ تا ۷۵
(۵) نامعلوم سروں کی مدد سے جمع کرنا دفعہ ۳۱۲
(۶) متوالی سلسلے باب ۲۴

اب ہم زیادہ عام طریقوں پر بحث کرنے کی طرف متوجہ ہوتے ہیں۔ لیکن بایں ہمہ باب ہذا کے دوران میں یہ معلوم ہوگا کہ متذکرہ بالا طریقے بھی بعض صورتوں میں مفید طور پر استعمال ہو سکتے ہیں۔

۳۸۱۔ اگر ایک سلسلہ کی ر ویں رقم دو ایسی مقادیر کے فرق سے تعبیر ہو سکے جن میں سے ایک رقم ر کا دہی تفاعل

ہو جو دوسری رقم ر - ۱ کا ہے تو سلسلہ کا حاصل جمع آسانی سے محسوب ہو سکتا ہے
فرض کرو کہ ایسا سلسلہ

$$\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}}$$

ہے اور اس کا حاصل جمع $\text{ج}_{\text{ن}}$ ہے، نیز فرض کرو کہ اس کی ر ویں رقم $\text{و}_{\text{ر}} - \text{و}_{\text{ر}-1}$ کی شکل میں لکھی جا سکتی ہے۔ تب

$$\text{ج}_{\text{ن}} = (\text{و}_1 - \text{و}_0) + (\text{و}_2 - \text{و}_1) + \ldots + (\text{و}_{\text{ن}-1} - \text{و}_{\text{ن}-2})$$

$$+ (\text{و}_{\text{ن}} - \text{و}_{\text{ن}-1})$$

$$= \text{و}_{\text{ن}} - \text{و}_0$$

مثال۔ سلسلہ ذیل

$$\frac{1}{(1+\text{لا})(1+2\text{لا})} + \frac{1}{(1+2\text{لا})(1+3\text{لا})} + \frac{1}{(1+3\text{لا})(1+4\text{لا})} + \ldots$$

کو ن رقموں تک جمع کرو۔
اگر ہم سلسلۂ بالا کو

$$\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}}$$

سے تعبیر کریں تو ظاہر ہے کہ

$$\text{ع}_1 = \frac{1}{\text{لا}}\left(\frac{1}{1+\text{لا}} - \frac{1}{1+2\text{لا}}\right)$$

$$\text{ع}_2 = \frac{1}{\text{لا}}\left(\frac{1}{1+2\text{لا}} - \frac{1}{1+3\text{لا}}\right)$$

$$\text{ع}_3 = \frac{1}{\text{لا}}\left(\frac{1}{1+3\text{لا}} - \frac{1}{1+4\text{لا}}\right)$$

....

$$ع_ن = \frac{1}{لا}\left(\frac{1}{1+ن\,لا} - \frac{1}{1+\overline{ن+1}\,لا}\right)$$

پس جمع کرنے سے

$$ج_ن = \frac{1}{لا}\left(\frac{1}{1+لا} - \frac{1}{1+\overline{ن+1}\,لا}\right)$$

$$= \frac{ن}{(1+لا)(1+\overline{ن+1}\,لا)}$$

مثال - تیئیسویں باب کی رو سے بعض اوقات $ع_ن$ کو جزوی کسور میں تحویل کرنے سے نہایت مناسب استحالہ معلوم ہو سکتا ہے -

مثال - $\frac{1}{(1+لا)(1+ا\,لا)} + \frac{ا}{(1+ا\,لا)(1+ا^2\,لا)} + \frac{ا^2}{(1+ا^2\,لا)(1+ا^3\,لا)}$ .... تا ن رقوم

$$ن \text{ ویں رقم} = \frac{ا^{ن-1}}{(1+ا^{ن-1}\,لا)(1+ا^{ن}\,لا)}$$

$$= \frac{عہ}{1+ا^{ن-1}\,لا} + \frac{بہ}{1+ا^{ن}\,لا}$$

$$\therefore ا^{ن-1} = عہ(1+ا^{ن}\,لا) + بہ(1+ا^{ن-1}\,لا)$$

$1+ا^{ن-1}\,لا$ اور $1+ا^{ن-1}\,لا$ کو یکے بعد دیگرے صفر کے مساوی فرض کرنے سے

$$عہ = \frac{ا^{ن-1}}{1-ا} \quad \text{اور} \quad بہ = -\frac{ا^{ن}}{1-ا}$$

$$\text{پس} \quad ع_1 = \frac{1}{1-ا}\left(\frac{1}{1+لا} - \frac{ا}{1+ا\,لا}\right)$$

اسی طرح سے $ع_2 = \frac{1}{1-ر}\left(\frac{ر}{1+رل} - \frac{ر^2}{1+ر^2ل}\right)$

....

$ع_ن = \frac{1}{1-ر}\left(\frac{ر^{ن-1}}{1+ر^{ن-1}ل} - \frac{ر^ن}{1+ر^نل}\right)$

$\therefore ج_ن = \frac{1}{1-ر}\left(\frac{1}{1+ل} - \frac{ر^ن}{1+ر^نل}\right)$

۳۸۳ — ایک سلسلہ کی ہر ایک رقم ر اجزائے ضربی سے بنی ہوئی ہے اور یہ اجزائے ضربی سلسلہ حسابیہ میں ہیں، نیز ہر ایک رقم کے ابتدا میں جداگانہ جو جزو ضربی واقع ہوتے ہیں وہ سب ایک ہی سلسلۂ حسابیہ میں ہیں، اس سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سلسلہ

$ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots\dots + ع_ن$ سے تعبیر ہوتا ہے

جہاں $ع_ن = (ا+ن ب)(ا+\overline{ن+1}ب)(ا+\overline{ن+2}ب)\dots(ا+\overline{ن+ر-1}ب)$

ن کی بجائے ن - ۱ رکھنے سے

$ع_{ن-1} = (ا+\overline{ن-1}ب)(ا+ن ب)(ا+\overline{ن+1}ب)\dots\dots(ا+\overline{ن+ر-2}ب)$

$\therefore (ا+\overline{ن-1}ب)ع_ن = (ا+\overline{ن+ر-1}ب)ع_{ن-1}$ = فرض کرو $و_ن$

ن کی بجائے ن + ۱ لکھنے سے

$(ا+\overline{ن+ر}ب)ع_ن = و_{ن+1}$

لہٰذا تفریق کرنے سے

$$(\text{ل}+1)\,\text{ب}\times \text{ع}_{\text{ن}} = \text{و}_{\text{ن}+1} - \text{و}_{\text{ن}}$$

اسی طرح $(\text{ل}+1)\,\text{ب}\;\text{ع}_{\text{ن}-1} = \text{و}_{\text{ن}} - \text{و}_{\text{ن}-1}$

....

$$(\text{ل}+1)\,\text{ب}\;\text{ع}_{2} = \text{و}_{3} - \text{و}_{2}$$

$$(\text{ل}+1)\,\text{ب}\;\text{ع}_{1} = \text{و}_{2} - \text{و}_{1}$$

جمع کرنے سے $(\text{ل}+1)\,\text{ب}\times \text{ج}_{\text{ن}} = \text{و}_{\text{ن}+1} - \text{و}_{1}$

یعنی $\text{ج}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{و}_{\text{ن}+1} - \text{و}_{1}}{(\text{ل}+1)\,\text{ب}}$

$= \dfrac{(\text{ا}+\overline{\text{ن}+\text{ل}}\,\text{ب})\,\text{ع}_{\text{ن}}}{(\text{ل}+1)\,\text{ب}} + \text{م}$ جہاں م

کوئی مقدار ہے جو ن کے تابع نہیں اور جس کی قیمت ن کو کوئی خاص قیمت دینے سے معلوم ہو سکتی ہے۔

مندرجۂ بالا جواب سے ہمیں ذیل کا آسان کلیہ معلوم ہوتا ہے

پہلے ن ویں رقم لکھ لو اور اُس کے آخری جزوِ ضربی کے بعد کا (یعنی $\overline{\text{ن}+1}$ واں) جزو ضربی بعد میں لکھ دو پھر اضافہ شدہ اجزائے ضربی کی تعداد اور مشترک فرق کے حاصلِ ضرب پر تقسیم کر کے ایک مستقل رقم جمع کر دو۔

یہ دیکھ لینا چاہیے کہ $\text{م} = -\dfrac{\text{و}_{1}}{(\text{ل}+1)\,\text{ب}} = -\dfrac{\text{ا}}{(\text{ل}+1)\,\text{ب}}\,\text{ع}_{1}$

لیکن م کی بجائے اس کی یہ قیمت نہ لینا ہی بہتر ہے، م

کی قیمت حسب بالا معلوم کرنی چاہئے۔

مثال۔ سلسلہ

$$۱ \times ۳ \times ۵ + ۳ \times ۵ \times ۷ + ۵ \times ۷ \times ۹ + \ldots\ldots$$

کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

ن ویں رقم $(۲ن - ۱)(۲ن + ۱)(۲ن + ۳)$ ہے۔

پس قاعدہ کی رو سے

$$ج_{ن} = \frac{(۲ن - ۱)(۲ن + ۱)(۲ن + ۳)(۲ن + ۵)}{۲ \times ۴} + م$$

م کی قیمت معلوم کرنے کے لئے $ن = ۱$ رکھنے سے سلسلہ میں صرف پہلی رقم رہ جاتی ہے، پس

$$۱۵ = \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times ۷}{۸} + م، \text{ اس سے } م = \frac{۱۵}{۸}$$

$$ج_{ن} = \frac{(۲ن - ۱)(۲ن + ۱)(۲ن + ۳)(۲ن + ۵)}{۸} + \frac{۱۵}{۸}$$

جو اختصار کے بعد $= ن(۲ن^{۳} + ۸ن^{۲} + ۷ن - ۲)$

۳۸۴۔ دفعہ ماقبل کا حاصل جمع نامعلوم سروں کے طریقہ سے بھی معلوم ہو سکتا ہے (دیکھو دفعہ ۳۱۲) نیز ملاحظہ ہو ذیل کا طریقہ۔

ظاہر ہے کہ $ع_{ن} = (۲ن - ۱)(۲ن + ۱)(۲ن + ۳) = ۸ن^{۳} + ۱۲ن^{۲} - ۲ن - ۳$

پس دفعہ (۱۷۰) کی ترقیم کی رو سے

$$ج_{ن} = ۸ \sum ن^{۳} + ۱۲ \sum ن^{۲} - ۲ \sum ن - ۳ن$$

$$\therefore ج_{ن} = ۲ن^{۲}(ن + ۱)^{۲} + ۲ن(ن + ۱)(۲ن + ۱) - ن(ن + ۱) - ۳ن$$

$$= ن(۲ن^{۳} + ۸ن^{۲} + ۷ن - ۲)$$

۳۸۵- یاد رہے کہ دفعہ ۳۸۳ کا طریق صرف اُسی صورت میں کارآمد ہو سکتا ہے جبکہ ہر ایک رقم کے اجزائے ضربی سلسلۂ حسابیہ میں ہوں اور ہر رقم کے ابتدا میں جداگانہ جو جزو ضربی ہوتے ہیں وہ ایک ہی سلسلۂ حسابیہ میں ہوں۔

مثلاً سلسلہ

$۱×۳×۵ + ۲×۴×۶ + ۳×۵×۷ + ۵×۷×۹ ......$ تا ن رقوم

کا حاصل جمع اِن دو کلیوں میں سے جن کا دفعہ ماقبل میں ذکر ہوا ہر ایک سے نکل سکتا ہے لیکن دفعہ ۳۸۳ کے قاعدہ سے براہِ راست نہیں نکل سکتا۔

یہاں $ع_ن = ن(ن+۲)(ن+۴) = ن(\overline{ن+۱+۱})(\overline{ن+۲+۲})$

$= ن(ن+۱)(ن+۲) + ۲ن(ن+۱) + ن(ن+۲) + ۲ن$

$= ن(ن+۱)(ن+۲) + ۳ن(ن+۱) + ۳ن$

یہی قاعدہ ہر رقم پر لگانے سے

$ج_ن = \frac{۱}{۴} ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳) + ن(ن+۱)(ن+۲)$

$+ \frac{۳}{۲} ن(ن+۱) + م$

$= \frac{۱}{۴} ن(ن+۱)(ن+۴)(ن+۵) ...$ کیونکہ مستقل رقم صفر ہے۔

۳۸۶- ایک سلسلہ کی ہر ایک رقم ایسے ل اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے متکافی پر مشتمل ہے جو سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور نیز ہر رقم کے ابتدا میں جداگانہ جو اجزائے ضربی واقع ہوتے ہیں وہ بھی ایک ہی سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔ اس سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

سلسلہ کو

$$ع_1 + ع_2 + ع_3 + \cdots\cdots + ع_ن$$

سے تعبیر کرو۔

جہاں $\frac{1}{ع_ن} = (ا+ن ب)(ا+\overline{ن+1}\,ب)(ا+\overline{ن+2}\,ب)\cdots\cdots(ا+\overline{ن+ر-1}\,ب)$

ن کی بجائے ن - ۱ رکھنے سے

$$\frac{1}{ع_{ن-1}} = (ا+\overline{ن-1}\,ب)(ا+ن ب)(ا+\overline{ن+1}\,ب)\cdots\cdots(ا+\overline{ن+ر-2}\,ب)$$

$\therefore (ا+\overline{ن+ر-1}\,ب)ع_ن = (ا+\overline{ن-1}\,ب)ع_{ن-1} = و_ن$ (فرض کرو)

ن کی بجائے ن + ۱ رکھنے سے

$$(ا+ن ب)ع_ن = و_{ن+1}$$

اس لئے تفریق کرنے سے

$$(ر-1)ب \times ع_ن = و_ن - و_{ن+1}$$

اسی طرح سے $(ر-1)ب \times ع_{ن-1} = و_{ن-1} - و_ن$

....

$$(ر-1)ب \times ع_2 = و_2 - و_3$$

$$(ر-1)ب \times ع_1 = و_1 - و_2$$

پس جمع کرنے سے $(ر-1)ب \times ج_ن = و_1 - و_{ن+1}$

یعنی $ج_ن = \frac{و_1 - و_{ن+1}}{(ر-1)ب} = م - \frac{(ا+ن ب)ع_ن}{(ر-1)ب}$

جہاں م ایک مقدار ہے جو ن کے تابع نہیں اور جسکی قیمت

ن کو کوئی خاص قیمت دینے سے معلوم ہو سکتی ہے۔

$$\text{پس } ج_ن = م - \frac{1}{(ر-1)ب} \times \frac{1}{(ا+ن+\overline{1}ب)\ldots(ا+ن+\overline{ر-1}ب)}$$

لہذا حاصل جمع ذیل کے کلیہ سے معلوم ہو سکتا ہے۔

ن ویں رقم لکھ لو اور پہلا جزو ضربی نکال دو۔ پھر اجزائے ضربی کی جو تعداد رہ جائے اُس سے اور فرق سے تقسیم کر کے ایک مستقل رقم جمع کر دو۔

$$\text{م کی قیمت } = \frac{ش}{(ر-1)ب} = \frac{ا+ر ب}{(ر-1)ب}$$

لیکن ہر ایک صورت میں م کی قیمت ن کو کوئی خاص قیمت دیکر معلوم کرنا ہی مناسب اور مصلحت آمیز ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ سلسلۂ ذیل

$$\frac{1}{1\times2\times3\times4} + \frac{1}{2\times3\times4\times5} + \frac{1}{3\times4\times5\times6} + \ldots$$

کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

$$\text{ن ویں رقم} = \frac{1}{ن(ن+1)(ن+2)(ن+3)} \text{ ہے}$$

پس کلیہ کی رو سے

$$ج_ن = م - \frac{1}{3(ن+1)(ن+2)(ن+3)}$$

$$\text{ن = ۱ رکھو، تب } \frac{1}{1\times2\times3\times4} = م - \frac{1}{3\times2\times3\times4}.$$

$$\text{جس سے } م = \frac{1}{18}$$

$$\text{لہذا } ج_ن = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(ن+1)(ن+2)(ن+3)}$$

ن کو لا انتہا بڑا بنا دینے سے ہمیں $ج_{\infty}$ کی قیمت $\frac{۱}{۱۸}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۲۔ سلسلہ

$$\frac{۳}{۱\times۲\times۴}+\frac{۴}{۲\times۳\times۵}+\frac{۵}{۳\times۴\times۶}+\ldots\ldots$$

کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

یہاں مندرجۂ بالا قاعدہ کا بالراست اطلاق نہیں ہو سکتا کیونکہ اگرچہ نسب نماؤں کے پہلے اجزائے ضربی جو جداگانہ ۱، ۲، ۳ ...... کے مساوی ہیں سلسلۂ حسابیہ میں ہیں لیکن کسی ایک نسب نما کے اجزائے ضربی سلسلہ حسابیہ میں نہیں ہیں۔ اس مثال میں ہمیں حسب ذیل عمل کرنا چاہیے۔

$$ع_{ن}=\frac{ن+۲}{ن(ن+۱)(ن+۳)}=\frac{(ن+۲)^{۲}}{ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}$$

$$=\frac{ن(ن+۱)+۳ن+۴}{ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}$$

$$=\frac{۱}{(ن+۲)(ن+۳)}+\frac{۳}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}+\frac{۴}{ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}$$

اب اِن تین رقموں میں سے ہر ایک کو ن ویں رقم کا ایک جزو خیال کیا جا سکتا ہے جو جداگانہ مندرجۂ بالا قاعدہ کے تحت میں آتی ہیں

$$\therefore ج_{ن}=م-\frac{۱}{ن+۳}-\frac{۳}{۲(ن+۲)(ن+۳)}-\frac{۴}{۳(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}$$

ن = ۱ رکھنے سے

$$\frac{۳}{۱\times۲\times۴}=م-\frac{۱}{۴}-\frac{۳}{۲\times۳\times۴}-\frac{۴}{۳\times۲\times۳\times۴}$$ جس سے $م=\frac{۲۹}{۳۶}$

$$\therefore \text{ج}_{\text{ن}} = \frac{۲۹}{۳۶} - \frac{۱}{\text{ن}+۳} - \frac{۳}{۲(\text{ن}+۲)(\text{ن}+۳)} - \frac{۴}{۳(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)(\text{ن}+۳)}$$

۳۸۷- جن صورتوں پر دفعات ۳۸۳، ۳۸۶ کے قاعدوں کا اطلاق بالراست ہوسکتا ہے، اُن صورتوں میں ہم ضابطوں کو استعمال کرنے کی بجائے ہمیشہ جمع کا عمل بطریق ذیل کرسکتے ہیں، اس طریقہ کو بعض اوقات تفریق کا طریقہ بھی کہتے ہیں۔

مثال- سلسلہ

$$۲\times۵ + ۵\times۸ + ۸\times۱۱ + ۱۱\times۱۴ + \cdots\cdots$$

کو ن رقموں تک جمع کرو-

اس صورت میں سلسلۂ حسابیہ

$$۲،\ ۵،\ ۸،\ ۱۱،\ ۱۴ \ \cdots\cdots$$ ہے-

سلسلہ زیر بحث کی ہر رقم کے اجزائے ضربی میں سلسلۂ حسابیہ کے لحاظ سے بعد کے عدد کا بطور جزو ضربی اضافہ کردو- اس طرح سے جو سلسلہ حاصل ہو اس کو جَ سے اور اصلی سلسلہ کو ج سے تعبیر کرو، تب

$$\text{جَ} = ۲\times۵\times۸ + ۵\times۸\times۱۱ + ۸\times۱۱\times۱۴ + \cdots\cdots + (۳\text{ن}-۱)(۳\text{ن}+۲)(۳\text{ن}+۵)$$

$$\therefore \text{جَ} - ۲\times۵\times۸ = ۵\times۸\times۱۱ + ۸\times۱۱\times۱۴ + ۱۱\times۱۴\times۱۷ + \cdots$$ ن - ۱ رقموں تک

تفریق کرنے سے

$$-۲\times۵\times۸ = ۹[۵\times۸ + ۸\times۱۱ + ۱۱\times۱۴ + \cdots \text{ن}-۱ \text{ رقموں تک}]$$
$$-(۳\text{ن}-۱)(۳\text{ن}+۲)(۳\text{ن}+۵)$$

$$-۲\times۵\times۸ = ۹[\text{ج} - ۲\times۵] - (۳\text{ن}-۱)(۳\text{ن}+۲)(۳\text{ن}+۵)$$

۹ ج = (۳ ن - ۱) (۳ ن + ۲) (۳ ن + ۵) - ۲ × ۵ × ۸ + ۲ × ۵ × ۹

∴ ج = ن (۳ ن^{2} + ۶ ن + ۱)

۳۸۴- جب کسی سلسلہ کی ن ویں رقم ن کا کوئی ناطق صحیح تفاعل ہو تو یہ سلسلہ ایک ایسی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جس پر دفعہ ۳۸۳ کا اطلاق آسانی سے ہوسکتا ہے۔

فرض کرو کہ ف (ن)، ن کا ایک ناطق، صحیح، ق ابعاد کا تفاعل ہے اور مان لو کہ

ف (ن) = ا + ب ن + ج ن (ن + ۱) + د ن (ن + ۱) (ن + ۲) + ...

جہاں ا، ب، ج، د... غیر معین مستقل ہیں جو تعداد میں ق + ا ہیں۔

چونکہ یہ مساوات متماثلہ ن کی سب قیمتوں کے لئے درست ہے اس لئے ہم ن کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کرسکتے ہیں، اس طرح ہمیں ق + ا مستقل معلوم کرنے کے لئے ق + ا سادہ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

مثال۔ ایک ایسے سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو جس کی ن ویں رقم ن^{4} + ۶ ن^{3} + ۵ ن^{2} ہے۔

فرض کرو کہ

ن^{4} + ۶ ن^{3} + ۵ ن^{2} = ا + ب ن + ج ن (ن + ۱) + د ن (ن + ۱) (ن + ۲)

+ ع ن (ن + ۱) (ن + ۲) (ن + ۳)

یہ فوراً معلوم ہوجاتا ہے کہ ا = ۰، ب = ۰، ع = ۱ اور ن = -۲، ن = -۳ رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ج = -۶، د = ۰، پس

ن^{4} + ۶ ن^{3} + ۵ ن^{2} = ن (ن + ۱) (ن + ۲) (ن + ۳) - ۶ ن (ن + ۱)

اس لئے ج$_{ن}$ = $\frac{1}{5}$ ن (ن + ۱) (ن + ۲) (ن + ۳) (ن + ۴) - ۲ ن (ن + ۱) (ن + ۲)

$$= \frac{1}{5}\,\text{ن}\,(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)(\text{ن}^2+7\,\text{ن}+2)$$

کثیر ضلعی اور اشکالی اعداد

۳۸۹ - ایک سلسلۂ حسابیہ کی پہلی رقم ا ہے اور مشترک فرق ب ہے، ظاہر ہے کہ اس سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع $\text{ن} + \frac{1}{2}\text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{ب}$ ہوگا، اگر ہم اس جملہ میں ب کو بالترتیب ۰، ۱، ۲، ۳، ...... قیمتیں دیں تو ہمیں اعداد

$$\text{ن}،\ \frac{1}{2}\text{ن}(\text{ن}+1)،\ \text{ن}^2،\ \frac{1}{2}\text{ن}(3\,\text{ن}-1)،\ \ldots\ldots$$

حاصل ہوتے ہیں۔

عددوں کے وہ سلسلے جنکی ن ویں رقمیں ان عددوں کے جداگانہ مساوی ہوں بالترتیب دوسرے، تیسرے، چوتھے، پانچویں رتبہ کے کثیر ضلعی عدد کہلاتے ہیں۔ پہلے رتبہ کے کثیر ضلعی اعداد کے سلسلہ میں ہر رقم ا کے مساوی ہے، دوسرے، تیسرے، چوتھے، پانچویں، ...... رتبہ کے کثیر ضلعی اعداد کو خطی، مثلث، مربع، مخمس، ...... اعداد بھی کہتے ہیں۔

۳۹۰ - ر، ویں رتبہ کے کثیر ضلعی اعداد کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ معلوم کرو۔

ر، ویں رتبہ کے اعداد کی ن، ویں رقم $\text{ن} + \frac{1}{2}\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ر}-2)$ ہے

$$\text{ش}\,\text{ج}_{\text{ن}} = \text{ح}\,\text{ن} + \frac{1}{2}(\text{ر}-2)\,\text{ح}\,(\text{ن}-1)\,\text{ن}$$

$$= \frac{1}{2}\text{ن}(\text{ن}+1) + \frac{1}{6}(\text{ر}-2)(\text{ن}-1)\,\text{ن}\,(\text{ن}+1) \ldots [\text{دفعہ ۳۸۳}]$$

$$= \frac{1}{6}\text{ن}(\text{ن}+1)\{(\text{ر}-2)(\text{ن}-1)+3\}$$

۳۹۱- اگر سلسلہ

۱، ۱، ۱، ۱، ....

کی ن رقموں کے مجموعہ کو ایک نئے سلسلہ کی ن ویں رقم قرار دیا جائے تو ہمیں ایک اور سلسلہ

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ....

حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح سے اگر ہم موخرالذکر سلسلہ کی ن رقموں کے مجموعہ یعنی $\frac{ن (ن+۱)}{۲}$ کو ایک اور سلسلہ کی ن ویں رقم قرار دیں تو ہمیں سلسلہ

۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ....

حاصل ہوتا ہے۔ یہی عمل بار بار کرنے سے ہمیں مسلسل ایسے سلسلے ملتے ہیں جن میں سے ہر ایک سلسلہ کی ن ویں رقم سلسلۂ ماقبل کی ن رقموں کے مجموعہ کے برابر ہوتی ہے۔ ان مسلسل سلسلوں کو پہلے، دوسرے، تیسرے، ...... رتبہ کے اشکالی اعداد کہتے ہیں۔

۳۹۲- رَ ویں رتبہ کے اشکالی اعداد کی ن ویں رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

پہلے رتبہ کی ن ویں رقم ۱ ہے، دوسرے رتبہ کی ن، ہے

تیسرے رتبہ کی حرن یعنی $\frac{۱}{۲}$ ن (ن + ۱)، چوتھے رتبہ کی ن ویں

رقم حر $\frac{ن (ن+۱)}{۲ \times ۱}$ یعنی $\frac{ن (ن+۱)(ن+۲)}{۳ \times ۲ \times ۱}$ ہے، پانچویں رتبہ

کی ن ویں رقم حر $\frac{ن (ن+۱)(ن+۲)}{۳ \times ۲ \times ۱}$ یعنی $\frac{ن (ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}{۴!}$

اور علیٰ ہذالقیاس۔

اسی طرح سے آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ ل' ویں رتبہ کی ن ویں رقم

ن(ن+۱)(ن+۲)....(ن+ل−۲) / |ل−۱ یعنی |ن+ل−۲ / |ن−۱ |ل−۱ ہے

نیز ل ویں رتبہ کی ن رقموں کا مجموعہ

ن(ن+۱)(ن+۲)....(ن+ل−۱) / |ل

ہے جو (ل+۱) ویں رتبہ کے اشکالی اعداد کی ن ویں رقم ہے۔

نوٹ۔ کسی رتبہ کے اشکالی اعداد کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرنے کے لئے دفعہ ۳۸۳ کا قاعدہ لگانے سے معلوم ہو گا کہ مستقل رقم ہمیشہ صفر ہوتی ہے۔

۳۹۵ - حکیم پاسکل نے اپنی کتاب ٹریٹی ڈو ٹرائینگل اریتھمیٹک' میں جو ۱۶۶۵ء میں طبع ہوئی اشکالی اعداد کے خواص پہ بحث کی ہے اس لحاظ سے یہ اعداد تاریخی دلچسپی بھی رکھتے ہیں۔

ذیل کی جدول میں سادہ شکل کا ایک حسابی مثلث دکھایا گیا ہے۔

۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	
۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶		
۱	۴	۱۰	۲۰	۳۵	۵۶	۸۴			
۱	۵	۱۵	۳۵	۷۰	۱۲۶				
۱	۶	۲۱	۵۶	۱۲۶					
۱	۷	۲۸	۸۴						
۱	۸	۳۶							
۱	۹								
۱									

پاسکل نے مثلث بالا کے اعداد کو ذیل کے قاعدہ کی رو سے

بنایا تھا۔

ہر ایک عدد اپنے اوپر کے اور اپنے دائیں جانب کے عدد کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔ مثلاً

۱۵ = ۵ + ۱۰، ۲۸ = ۷ + ۲۱، ۱۲۶ = ۵۶ + ۷۰

اعداد کو بنانے کے طریقہ سے ظاہر ہے کہ متواتر افقی قطاریں یا انتصابی ستون بالترتیب پہلے، دوسرے، تیسرے، .... رتبہ کے اشکالی اعداد ہیں۔

اگر ایک خط اس طرح کھینچا جائے کہ اس سے پہلی قطار اور دائیں جانب کے ستون میں سے اعداد کی مساوی تعداد قطع ہو تو اس خط کو قاعدہ کہتے ہیں اور قاعدوں کا شمار اوپر کے دائیں کونے سے کرتے ہیں۔ مثلاً چھٹا قاعدہ وہ خط ہے جو اعداد ۱، ۵، ۱۰، ۱۰، ۵، ۱ میں سے گزرتا ہے۔ یہ بات قابل توجہ ہے کہ یہ اعداد تعداد میں چھ ہیں اور $(۱ + لا)^۵$ کے پھیلاؤ کی رقوم کے سر ہیں۔

اِن اعداد کے خواص پر حکیم پاسکل نے بڑی قابلانہ بحث کی ہے بالخصوص اس نے اپنے حسابی مثلث کو اجتماع کے نظریہ کو وسعت دینے اور احتمالات کے متعلق چند دلچسپ مسئلے ثابت کرنے میں نہایت خوبی کے ساتھ استعمال کیا، احتمال کی تاریخ مصنفہ ٹاڈہنٹر میں اس مضمون پر بسیط بحث کی ہے۔

۳۹۴ — جہاں کسی سلسلہ میں تعداد رقوم کے متعلق کوئی اشتباہ نہ ہو وہاں ہم نے عمل جمع کو ظاہر کرنے کے لئے علامت مجـ سے کام لیا ہے۔ بعض اوقات اُن حدود کو ظاہر کرنے کے لئے جن کے اندر جمع کا عمل کرنا مقصود ہوتا ہے ذیل کی مرمہ علامت کا استعمال کرنا زیادہ سہولت بخش ثابت ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ف (لا)، لا کا کوئی تفاعل ہے، تب $\underset{لا=ل}{\overset{لا=م}{مجـ}}$ ف (لا)

ان سب رقوم کے حاصل جمع کو تعبیر کریگا جو ف (لا) میں لا کو ل سے لیکر م تک سب صحیح عددی قیمتیں دینے سے حاصل ہوتی ہیں جہاں ل اور م دونوں شامل ہیں۔ بطور مثال کے فرض کرو کہ اس سلسلہ کی سب رقوم کا حاصل جمع دریافت کرنا مقصود ہے جو جملہ

(ن-۱)(ن-۲)....(ن-ر) ÷ |ر

میں ن کو ر+۱ سے لیکر ن تک سب صحیح عددی قیمتیں دینے سے بشمول ن اور ر+۱ کے حاصل ہوتی ہے۔

شمار کنندہ کے اجزائے ضربی کو صعودی ترتیب میں لکھنے سے

حاصل جمع مطلوبہ = Σ (ن=ر+۱ سے ن=ن تک) (ن-ر)(ن-ر+۱)....(ن-۱) ÷ |ر

= (۱ ÷ |ر) {۱×۲×۳×....×ر + ۲×۳×۴....(ر+۱) + ... + (ن-ر)(ن-ر+۱)....(ن-۱)}

= (۱ ÷ |ر) × (ن-ر)(ن-ر+۱)....(ن-۱)ن ÷ (ر+۱) .... دفعہ ۲۸۳

= ن(ن-۱)(ن-۲)....(ن-ر) ÷ |ر+۱

چونکہ جملہ زیر بحث ۱ سے لیکر ر تک ن کی سب قیمتوں کے لئے صفر کے مساوی ہے، اس لئے مندرجہ بالا نتیجہ بشکل ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

Σ (ن=۱ سے ن=ن تک) (ن-۱)(ن-۲)....(ن-ر) ÷ |ر

$$= \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)....(ن-ر)}{\lfloor ر+۱}$$

امثلہ نمبری ۲۹ (ر)

ذیل کے سلسلوں کو ن رقموں تک جمع کرو

(۱) ۱×۲×۳ + ۲×۳×۴ + ۳×۴×۵ + ...

(۲) ۱×۲×۳×۴ + ۲×۳×۴×۵ + ۳×۴×۵×۶ + ...

(۳) ۱×۴×۷ + ۴×۷×۱۰ + ۷×۱۰×۱۳ + ...

(۴) ۱×۴×۷ + ۲×۵×۸ + ۳×۶×۹ + ...

(۵) ۱×۵×۹ + ۲×۶×۱۰ + ۳×۷×۱۱ + ...

ذیل کے سلسلوں میں سے ہر ایک کا مجموعہ ن رقموں تک اور لاانتہا تک معلوم کرو۔

(۶) $\frac{۱}{۱\times۲} + \frac{۱}{۲\times۳} + \frac{۱}{۳\times۴} + ...$

(۷) $\frac{۱}{۱\times۴} + \frac{۱}{۴\times۷} + \frac{۱}{۷\times۱۰} + ...$

(۸) $\frac{۱}{۱\times۳\times۵} + \frac{۱}{۳\times۵\times۷} + \frac{۱}{۵\times۷\times۹} + ...$

(۹) $\frac{۱}{۱\times۴\times۷} + \frac{۱}{۴\times۷\times۱۰} + \frac{۱}{۷\times۱۰\times۱۳} + ...$

(۱۰) $\frac{۴}{۱\times۲\times۳} + \frac{۵}{۲\times۳\times۴} + \frac{۶}{۳\times۴\times۵} + ...$

(۱۱) $\frac{۱}{۳\times۴\times۵} + \frac{۲}{۴\times۵\times۶} + \frac{۳}{۵\times۶\times۷} + ...$

(۱۲) $\frac{۱}{۱\times۲\times۳}+\frac{۳}{۲\times۳\times۴}+\frac{۵}{۳\times۴\times۵}+\frac{۷}{۴\times۵\times۶}+\dots$

ذیل کے سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(۱۳) $۱\times۳\times۲^۲+۲\times۴\times۳^۲+۳\times۵\times۴^۲+\dots\dots$

(۱۴) $(ن^۲-۱^۲)+۲(ن^۲-۲^۲)+۳(ن^۲-۳^۲)+\dots\dots$

اُن سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو جن کی ن ویں رقمیں حسب ذیل ہیں۔

(۱۵) $ن^۲(ن^۲-۱)$ (۱۶) $(ن^۲+۵ن+۴)(ن^۲+۵ن+۸)$

(۱۷) $\frac{ن^۲(ن^۲-۱)}{۴ن^۲-۱}$ (۱۸) $\frac{ن^۴+۲ن^۳+ن^۲-۱}{ن^۲+ن}$

(۱۹) $\frac{ن^۳+۳ن^۲+۲ن+۲}{ن^۲+۲ن}$ (۲۰) $\frac{ن^۴+ن^۲+۱}{ن^۴+ن}$

(۲۱) ثابت کرو کہ اشکالی اعداد کے ر ویں رتبہ کی ن ویں رقم ن ویں رتبہ کی ر ویں رقم کے مساوی ہے۔

(۲۲) اگر اشکالی اعداد کے ر ویں رتبہ کی ن ویں رقم (ر-۲) ویں رتبہ کی (ن + ۲) ویں رقم کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ ر = ن + ۲

(۲۳) پہلے رتبہ سے لیکر ر ویں رتبہ (بشمول ر واں) تک کے کثیر ضلعی اعداد کے مختلف جیٹ لئے گئے ہیں اور ہر جیٹ میں رقوم کی تعداد ن ہے

ثابت کرو کہ اِن سب رقوم کا حاصل جمع

$\frac{(ل-۱)ن(ن+۱)}{۱۲}$ (ل ن - ۲ ن - ل + ۸) ہے

فرقوں کے طریقہ سے جمع کرنا

۳۹۵۔ فرض کرو کہ ع ن، ن کا ایک صحیح، منطق تفاعل ہے، نیز فرض کرو کہ جب ن کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، .... قیمتیں دی جائیں تو ع ن کی قیمتیں بالترتیب ع۱، ع۲، ع۳، ... ہوتی ہیں۔

اب ہم ایک ایسا طریقہ دریافت کرینگے کہ اگر ع۱، ع۲، ع۳، ع۴، .... میں سے چند رقوم معلوم ہوں تو ع ن کی قیمت معلوم ہو سکے۔

پہلے ہم سلسلہ ع۱، ع۲، ع۳، ع۴، ع۵، .... کی ہر ایک رقم کو رقم مابعد میں سے تفریق کرنے سے ایک اور سلسلہ حاصل کرتے ہیں جو حسب ذیل ہے

ع۲ - ع۱، ع۳ - ع۲، ع۴ - ع۳، ع۵ - ع۴، ....

اس سلسلہ کو فرقوں کے پہلے رتبہ کا سلسلہ کہتے ہیں اور آسانی کی خاطر

△ ع۱، △ ع۲، △ ع۳، △ ع۴ .... سے تعبیر کرتے ہیں

اس سلسلہ کی ہر رقم کو رقم مابعد میں سے تفریق کرنے سے جو سلسلہ

△ ع۲ - △ ع۱، △ ع۳ - △ ع۲، △ ع۴ - △ ع۳، .....

حاصل ہوتا ہے اس کو فرقوں کے دوسرے رتبہ کا سلسلہ کہتے ہیں اور

$\Delta^{۲}\text{ع}_{۱}$ ، $\Delta^{۲}\text{ع}_{۲}$ ، $\Delta^{۲}\text{ع}_{۳}$ ، ...... سے تعبیر کرتے ہیں

اسی طرح سلسلہ بالا سے ہم بالترتیب تیسرے، چوتھے، پانچویں، فرقوں کے رتبوں کے سلسلے بنا سکتے ہیں ۔ اِن سلسلوں کی عام رقمیں بالترتیب $\Delta^{۳}\text{ع}_{ر}$ ، $\Delta^{۴}\text{ع}_{ر}$ ، $\Delta^{۵}\text{ع}_{ر}$ ، ..... ہونگی

ذیل کے سلسلوں

$$\text{ع}_{۱} \quad \text{ع}_{۲} \quad \text{ع}_{۳} \quad \text{ع}_{۴} \quad \text{ع}_{۵} \quad \text{ع}_{۶} \ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta\text{ع}_{۱} \quad \Delta\text{ع}_{۲} \quad \Delta\text{ع}_{۳} \quad \Delta\text{ع}_{۴} \quad \Delta\text{ع}_{۵} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^{۲}\text{ع}_{۱} \quad \Delta^{۲}\text{ع}_{۲} \quad \Delta^{۲}\text{ع}_{۳} \quad \Delta^{۲}\text{ع}_{۴} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^{۳}\text{ع}_{۱} \quad \Delta^{۳}\text{ع}_{۲} \quad \Delta^{۳}\text{ع}_{۳} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

کے بنانے کا جو قاعدہ ہے اس سے ظاہر ہے کہ کسی سلسلہ کی کوئی رقم اپنی رقم ماقبل اور دائیں جانب نیچے کی رقم کو جمع کرنے سے بنتی ہے ۔

مثلاً $\text{ع}_{۲} = \text{ع}_{۱} + \Delta\text{ع}_{۱}$ اور $\Delta\text{ع}_{۲} = \Delta\text{ع}_{۱} + \Delta^{۲}\text{ع}_{۱}$ جمع کرنے سے چونکہ $\text{ع}_{۲} + \Delta\text{ع}_{۲} = \text{ع}_{۳}$ ، اس لئے

$$\text{ع}_{۳} = \text{ع}_{۱} + ۲\Delta\text{ع}_{۱} + \Delta^{۲}\text{ع}_{۱}$$

بعینہ اسی طرح سے پہلے، دوسرے، تیسرے سلسلوں کی بجائے دوسرا تیسرا چوتھا سلسلہ لینے سے

$$\Delta\text{ع}_{۳} = \Delta\text{ع}_{۱} + ۲\Delta^{۲}\text{ع}_{۱} + \Delta^{۳}\text{ع}_{۱}$$

اس کو سلسلۂ بالا میں جمع کرنے سے چونکہ

$$\text{ع}_3 + \Delta\,\text{ع}_3 = \text{ع}_4$$ ، اس لئے

$$\text{ع}_4 = \text{ع}_1 + 3\,\Delta\,\text{ع}_1 + 3\,\Delta^2\,\text{ع}_1 + \Delta^3\,\text{ع}_1$$

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس منزل تک عددی سر اسی ضابطہ کے مطابق بنتے ہیں جس کے مطابق کہ مسئلہ ثنائی سے بنتے ہیں، اب ہم استقراء حسابیہ سے یہ ثابت کریں گے کہ یہ ضابطہ ہر صورت میں درست اور برقرار رہتا ہے۔

فرض کرو کہ $$\text{ع}_{\text{ن}+1} = \text{ع}_1 + \text{ن}\,\Delta\,\text{ع}_1 + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}\,\Delta^2\,\text{ع}_1 + \dots + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}\,\Delta^{\text{ر}}\,\text{ع}_1 + \dots + \Delta^{\text{ن}}\,\text{ع}_1$$ سلسلوں

اسی طرح اگر ہم پہلے سلسلہ کو (ن + ۱) ویں تک لینے کی بجائے دوسرے سلسلہ کو (ن +۲) ویں سلسلہ تک لیں تو

$$\Delta\,\text{ع}_{\text{ن}+1} = \Delta\,\text{ع}_1 + \text{ن}\,\Delta^2\,\text{ع}_1 + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2\times 1}\,\Delta^3\,\text{ع}_1 + \dots + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}-1}\,\Delta^{\text{ر}}\,\text{ع}_1 + \dots + \Delta^{\text{ن}+1}\,\text{ع}_1$$

اس سلسلہ کو سلسلۂ بالا میں جمع کرنے سے چونکہ

$$\text{ع}_{\text{ن}+1} + \Delta\,\text{ع}_{\text{ن}+1} = \text{ع}_{\text{ن}+2}$$ ، اس لئے

$$\text{ع}_{\text{ن}+2} = \text{ع}_1 + (\text{ن}+1)\,\Delta\,\text{ع}_1 + \left({}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}} + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}-1}\right)\Delta^{\text{ر}}\,\text{ع}_1 + \dots \Delta^{\text{ن}+1}\,\text{ع}_1 \dots$$

لیکن $_{ن}ج_{ر} + {}_{ن}ج_{ر-۱} = \left(\frac{ن-ر+۱}{ر}+۱\right) \times {}_{ن}ج_{ر-۱} = \frac{ن+۱}{ر} \times {}_{ن}ج_{ر-۱}$

$$= \frac{(ن+۱)ن(ن-۱)\cdots\cdots(\overline{ن+۱}-ر+۱)}{۱\times۲\times۳\cdots\cdots(ر-۱)ر}$$

$$= {}_{ن+۱}ج_{ر}$$

پس ثابت ہوا کہ اگر یہ کلیہ $ع_{ن+۱}$ کے لئے درست ہو تو یہ $ع_{ن+۲}$ کے لئے بھی درست ہوتا ہے۔ لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ یہ $ع_{۴}$ کے لئے درست ہے
لہٰذا یہ $ع_{۵}$ کے لئے درست ہے اور علیٰ ہذا القیاس، اسلئے یہ ہر صورت میں درست ہے یعنے

$$ع_{ن} = ع_{۱} + (ن-۱)\Delta ع_{۱} + \frac{(ن-۱)(ن-۲)}{۲\times۱}\Delta_{۲} ع_{۱} + \cdots + \Delta_{ن-۱} ع_{۱}$$

۳۹۶- سلسلہ $ع_{۱}، ع_{۲}، ع_{۳}، ع_{۴}، \ldots\ldots$ کی ن رقموں کا حاصل جمع $ع_{۱}$ کے فرقوں کی رقوم میں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سلسلہ $ع_{۱}، ع_{۲}، ع_{۳}، \ldots\ldots$ سلسلۂ ذیل
$و_{۱}، و_{۲}، و_{۳} \ldots\ldots$
کے فرقوں کے پہلے رتبہ کا سلسلہ ہے۔

تب $و_{ن+۱} = (و_{ن+۱}-و_{ن}) + (و_{ن} - و_{ن-۱}) + \cdots + (و_{۲}-و_{۱}) + و_{۱}$ متطابقاً

پس سلسلوں

$$\text{و}_1،\ \text{و}_2،\ \text{و}_3،\ \text{و}_4،\ \text{و}_5 \ldots\ldots$$

$$\text{ع}_1\ \ \text{ع}_2\ \ \text{ع}_3\ \ \text{ع}_4 \ldots\ldots$$

$$\Delta\text{ع}_1\ \ \Delta\text{ع}_2\ \ \Delta\text{ع}_3 \ldots\ldots$$

میں ضابطۂ تکوین وہی ہے جو دفعۂ گذشتہ میں تھا۔

$$\therefore \text{و}_{\text{ن}+1} = 0 + \text{ن}\,\text{ع}_1 + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\Delta\text{ع}_1 + \ldots + \Delta^{\text{ن}}\text{ع}_1$$

یعنی

$$\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}}$$

$$= \text{ن}\,\text{ع}_1 + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{|\underline{2}}\Delta\text{ع}_1 + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{|\underline{3}}\Delta^2\text{ع}_1 + \ldots$$

$$\ldots + \Delta^{\text{ن}}\text{ع}_1$$

دفعۂ ہذا اور دفعۂ ماقبل کے ضوابط قدرے مختلف شکل میں بطریق ذیل بھی لکھے جا سکتے ہیں۔ اگر ا کسی مفروضہ سلسلہ کی پہلی رقم کو تعبیر کرے اور فرقوں کے متواتر رتبوں کی پہلی رقمیں بالترتیب ف_1، ف_2، ف_3، .... ہوں تو مفروضہ سلسلہ کی ن ویں رقم

$$\text{ا} + (\text{ن}-1)\text{ف}_1 + \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{|\underline{2}}\text{ف}_2 + \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{|\underline{2}}\text{ف}_3$$

$$+ \ldots\ldots$$

ہوگی اور مفروضہ سلسلہ کی ن رقموں کا مجموعہ

$$\text{ن}\,\text{ا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{|\underline{2}}\text{ف}_1 + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{|\underline{3}}\text{ف}_2$$

$$+\ \frac{\text{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}}{\lfloor ۴}\ \text{ف}_{۴} + \cdots\cdots$$

ہوگا۔

مثال۔ سلسلہ ذیل

۱۲، ۴۰، ۹۰، ۱۶۸، ۲۸۰، ۴۳۲، ....

کی عام رقم اور ن رقموں کا مجموعہ معلوم کرو

فرقوں کے متواتر رتبے یہ ہیں۔

۲۸، ۵۰، ۷۸، ۱۱۲، ۱۵۲، ....

۲۲ ۲۸ ۳۴ ۴۰

۶ ۶ ۶

۰ ۰

$$\text{لہذا ن ویں رقم} = ۱۲ + ۲۸(\text{ن}-۱) + \frac{۲۲(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{\lfloor ۲} + \frac{۶(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۳)}{\lfloor ۳}$$

$$= \text{ن}^{۳} + ۵\,\text{ن}^{۲} + ۶\,\text{ن}$$

اب ن رقموں کا حاصل جمع $\sum \text{ن}^{۳} + ۵\sum \text{ن}^{۲} + ۶\sum \text{ن}$ کی قیمت محسوب کرنے سے بھی معلوم ہوسکتا ہے، لیکن اگر ہم دفعۂ ہذا کا ضابطہ استعمال کریں تو

$$\text{ج}_{\text{ن}} = ۱۲\,\text{ن} + \frac{۲۸\,\text{ن(ن-۱)}}{\lfloor ۲} + \frac{۲۲\,\text{ن(ن-۱)(ن-۲)}}{\lfloor ۳} + \frac{۶\,\text{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}}{\lfloor ۴}$$

$$= \frac{\text{ن}}{۱۲}\left(۳\,\text{ن}^{۳} + ۲۶\,\text{ن}^{۲} + ۶۹\,\text{ن} + ۴۶\right)$$

$$= \frac{۱}{۱۲}\, ن\,(ن + ۱)\,(۳ ن^{۲} + ۲۳\, ن + ۴۶)$$

۳۹۷- یہ امر قابل غور ہے کہ جمع کرنے کا یہ عمل صرف اسی صورت میں کام آسکتا ہے جبکہ سلسلہ زیر بحث ایسا ہو کہ فرقوں کے متواتر رتبوں کے لئے سلسلے نکالنے میں ہم بالآخر ایک ایسے سلسلہ پر پہنچ سکیں جس کی سب رقمیں باہم مساوی ہوں۔ یہ صورت ہمیشہ واقع ہوگی بشرطیکہ سلسلہ کی ن ویں رقم ن کا کوئی ناطق صحیح تفاعل ہو۔

آسانی کی خاطر ہم صرف تین ابعاد کے تفاعل پر بحث کریں گے اگرچہ ثبوت کا طریقہ بالکل عام ہے۔

فرض کرو کہ سلسلہ ہے

$$ع_{۱} + ع_{۲} + ع_{۳} + \ldots\ldots + ع_{ن} + ع_{ن+۱} + ع_{ن+۲} + \ldots\ldots$$

جہاں $ع_{ن} = ا\, ن^{۳} + ب\, ن^{۲} + ج\, ن + د$

نیز فرض کرو کہ پہلے، دوسرے، تیسرے فرقوں کے رتبوں کی ن ویں رقمیں بالترتیب $ق_{ن}$، $ه_{ن}$، $ی_{ن}$ ہیں۔

تب $ق_{ن} = ع_{ن+۱} - ع_{ن} = ا(۳ن^{۲} + ۳ن + ۱) + ب(۲ن + ۱) + ج$

یعنی $ق_{ن} = ۳ا\, ن^{۲} + (۳ا + ۲ب)\, ن + ا + ب + ج$

اسی طرح سے $ه_{ن} = ق_{ن+۱} - ق_{ن} = ۳ا\,(۲ن + ۱) + ۳ا + ۲ب$

اور $ی_{ن} = ه_{ن+۱} - ه_{ن} = ۶ا$

یعنے فرقوں کے تیسرے رتبہ میں سب رقوم باہم مساوی ہیں۔

عام طور پر اگر سلسلہ زیر بحث کی ن ویں رقم ق ابعاد کی ہو تو فرقوں کے ق ویں رتبہ کی رقوم باہم مساوی ہونگی اور بر عکس اس کے اگر فرقوں کے ق ویں رتبہ کی رقمیں باہم مساوی ہوں تو سلسلہ زیر بحث کی ن ویں رقم ن کا ایک ق ابعاد والا منطق صحیح تفاعل ہوگی۔

مثال۔ سلسلہ - ۱، -۳، ۳، ۲۳، ۶۳، ۱۲۹ ...... کی ن ویں رقم معلوم کرو۔

فرقوں کے متواتر رتبے یہ ہیں۔

-۲، ۶، ۲۰، ۴۰، ۶۶ ....

۸، ۱۴، ۲۰، ۲۶، ....

۶، ۶، ۶، ....

پس فرقوں کے تیسرے رتبہ کی سب رقمیں باہم مساوی ہیں۔ اسلئے ہم فرض کرسکتے ہیں کہ عِ = ا + ب ن + ج ن^{2} + د ن^{3} جہاں ا، ب، ج، د کی قیمتیں دریافت کرنا مقصود ہے۔

ن کی بجائے بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴ رکھنے سے ہمیں چار ہمزاد مساواتیں ملتی ہیں جن سے ا = ۴، ب = -۳، ج = -۲، د = ۱ حاصل ہوتے ہیں۔

پس سلسلۂ بالا کی عام رقم ۴ - ۳ن - ۲ن^{2} + ن^{3} ہے۔

۹۸۔ اگر ا ن، ن کا ایک ق ابعاد والا منطق صحیح تفاعل ہو تو سلسلہ

$$ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^{۲} + \dots + ا_ن لا^{ن}$$

ایک متوالی سلسلہ ہوگا جس کے ربط کا پیمانہ (۱ - لا)$^{ق+۱}$ ہوگا

فرض کرو کہ سلسلہ بالا کا حاصل جمع ج ہے، تب

$$\text{ج}(۱-\text{لا}) = \text{ا}_۰ + (\text{ا}_۱ - \text{ا}_۰)\text{لا} + (\text{ا}_۲ - \text{ا}_۱)\text{لا}^۲ + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + (\text{ا}_\text{ن} - \text{ا}_{\text{ن}-۱})\text{لا}^\text{ن} - \text{ا}_\text{ن}\text{لا}^{\text{ن}+۱}$$

$$= \text{ا}_۰ + \text{ب}_۱\text{لا} + \text{ب}_۲\text{لا}^۲ + \ldots\ldots + \text{ب}_\text{ن}\text{لا}^\text{ن} - \text{ا}_\text{ن}\text{لا}^{\text{ن}+۱} \quad (\text{فرض کرو})$$

یہاں $\text{ب}_\text{ن} = \text{ا}_\text{ن} - \text{ا}_{\text{ن}-۱}$ یعنی $\text{ب}_\text{ن}$ کا بُعد ن میں ق - ۱ ہے
آخری سلسلہ کو ۱ - لا سے ضرب دینے سے

$$\text{ج}(۱-\text{لا})^۲ = \text{ا}_۰ + (\text{ب}_۱ - \text{ا}_۰)\text{لا} + (\text{ب}_۲ - \text{ب}_۱)\text{لا}^۲ + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + (\text{ب}_\text{ن} - \text{ب}_{\text{ن}-۱})\text{لا}^\text{ن} - (\text{ا}_\text{ن} + \text{ب}_\text{ن})\text{لا}^{\text{ن}+۱} + \text{ا}_\text{ن}\text{لا}^{\text{ن}+۲}$$

$$= \text{ا}_۰ + (\text{ب}_۱ - \text{ا}_۰)\text{لا} + \text{ج}_۲\text{لا}^۲ + \text{ج}_۳\text{لا}^۳ + \ldots\ldots + \text{ج}_\text{ن}\text{لا}^\text{ن} - (\text{ا}_\text{ن} + \text{ب}_\text{ن})\text{لا}^{\text{ن}+۱} + \text{ا}_\text{ن}\text{لا}^{\text{ن}+۲}$$

فرض کرو

یہاں $\text{ج}_\text{ن} = \text{ب}_\text{ن} - \text{ب}_{\text{ن}-۱}$، یعنی $\text{ج}_\text{ن}$ کے ابعاد ن میں ق - ۲ ہیں
اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ زیر بحث کو بالتواتر (۱ - لا) سے ضرب دینے سے پہلے، دوسرے، تیسرے، حاصل ضربوں میں $\text{لا}^\text{ن}$ کے جو سر حاصل ہوں گے وہ بالترتیب سروں کے پہلے، دوسرے، تیسرے فرقوں کے رتبوں کی عام رقموں کے جداگانہ مساوی ہوں گے۔

حسب مفروض $\text{ا}_\text{ن}$، ن کا ایک ق ابعاد والا ناطق صحیح

تفاعل ہے اس لئے (۱ - لا) سے ق بار ضرب دینے سے ہمیں ایک ایسا سلسلہ حاصل ہوگا کہ سوائے شروع کی اور آخری کی ق رقموں کے سلسلہ کی باقیماندہ رقمیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں گی جن میں سے ہر ایک کا سر وہی ہوگا۔
(دیکھو دفعہ ۳۹۷)

$$\text{پس}\quad \text{ج}\,(\text{۱}-\text{لا})^{\text{ق}} = \text{ک}\,(\text{لا}^{\text{ق}} + \text{لا}^{\text{ق}+\text{۱}} + \ldots + \text{لا}^{\text{ن}}) + \text{ف}\,(\text{لا})$$

جہاں ک ایک مستقل ہے اور ف(لا)، حاصل ضرب میں ابتدائی ق اور آخری ق رقموں کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\therefore\ \text{ج}\,(\text{۱}-\text{لا})^{\text{ق}} = \frac{\text{ک}\,(\text{لا}^{\text{ق}} - \text{لا}^{\text{ن}+\text{۱}})}{\text{۱}-\text{لا}} + \text{ف}\,(\text{لا})$$

$$\text{یعنی}\quad \text{ج} = \frac{\text{ک}\,\text{لا}^{\text{ق}}\,(\text{۱}-\text{لا}^{\text{ن}-\text{ق}+\text{۱}}) + (\text{۱}-\text{لا})\,\text{ف}\,(\text{لا})}{(\text{۱}-\text{لا})^{\text{ق}+\text{۱}}}$$

پس سلسلہ زیر بحث ایک متوالی سلسلہ ہے جسکا پیمانۂ ربط

$(\text{۱}-\text{لا})^{\text{ق}+\text{۱}}$ ہے [دیکھو دفعہ ۳۲۵]

اگر عام رقم نہ دی ہوئی ہو تو ان کے ابعاد دفعہ ۳۹۷ کے طریقے سے بآسانی معلوم ہو سکتے ہیں۔

مثال۔ سلسلۂ ذیل

$$\text{۳} + \text{۵}\,\text{لا} + \text{۹}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱۵}\,\text{لا}^{\text{۳}} + \text{۲۳}\,\text{لا}^{\text{۴}} + \text{۳۳}\,\text{لا}^{\text{۵}} + \ldots\ldots$$

کا تکوینی تفاعل معلوم کرو۔

صدرِ اول سے متواتر فرقوں کے رتبے بنانے سے ہمیں ذیل کے سلسلے حاصل ہوتے ہیں۔

$$2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10$$
$$2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$$

پس ا ن کا دو ابعاد والا منطق صحیح تفاعل ہے اور اس لئے ربط کا پیمانہ $(1-\text{لا})^3$ ہے۔ لہٰذا

$$\text{ج} = 3 + 5\,\text{لا} + 9\,\text{لا}^2 + 15\,\text{لا}^3 + 23\,\text{لا}^4 + 33\,\text{لا}^5 + \ldots\ldots$$
$$-3\,\text{لا}\,\text{ج} = -9\,\text{لا} - 15\,\text{لا}^2 - 27\,\text{لا}^3 - 45\,\text{لا}^4 - 69\,\text{لا}^5 - \ldots\ldots$$
$$3\,\text{لا}^2\,\text{ج} = 9\,\text{لا}^2 + 15\,\text{لا}^3 + 27\,\text{لا}^4 + 45\,\text{لا}^5 + \ldots\ldots$$
$$-\text{لا}^3\,\text{ج} = -3\,\text{لا}^3 - 5\,\text{لا}^4 - 9\,\text{لا}^5 - \ldots\ldots$$

جمع کرنے سے $(1-\text{لا})^3\,\text{ج} = 3 - 4\,\text{لا} + 3\,\text{لا}^2$

$$\therefore\ \text{ج} = \frac{3 - 4\,\text{لا} + 3\,\text{لا}^2}{(1-\text{لا})^3}$$

۳۹۹ — چوبیسویں باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی متوالی سلسلہ کا تفاعل تکوینی ایک ناطق کسر ہوتی ہے جس کا نسب نما پیمانۂ ربط ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ اس پیمانۂ ربط کو اجزائے ضربی $(1-\text{ا}\,\text{لا})(1-\text{ب}\,\text{لا})(1-\text{ج}\,\text{لا})\ldots\ldots$ میں تحویل کیا جاسکتا ہے، تب تفاعل تکوینی ذیل کی شکل کی جزوی کسور

$$\frac{\text{ا}_1}{1-\text{ا}\,\text{لا}} + \frac{\text{ب}_1}{1-\text{ب}\,\text{لا}} + \frac{\text{ج}_1}{1-\text{ج}\,\text{لا}} + \ldots\ldots$$

میں علحدہ علحدہ کیا جاسکتا ہے، اب ان کسروں میں سے

ہر ایک کسر مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ایک سلسلۂ ہندسیہ کی شکل میں پھیلائی جاسکتی ہے۔ پس اس صورت میں ہم متوالی کسر کو متعدد ہندسی سلسلوں کے حاصل جمع کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

لیکن اگر پیمانۂ ربط میں کوئی جزوِ ضربی مثلاً (۱ − ا لا) ایک سے زیادہ بار واقع ہو تو اس کے جواب میں جو جزوی کسریں حاصل ہونگی وہ $\frac{ا_۲}{(۱-ا\,لا)^۲}$، $\frac{ا_۳}{(۱-ا\,لا)^۳}$، ..... کی شکل کی ہوں گی اور ظاہر ہے کہ ان کسروں کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلانے سے ہمیں ہندسی سلسلے حاصل نہیں ہوں گے، پس ایسی صورت میں متوالی سلسلہ کو کسی ایک ہندسی سلسلوں کے حاصل جمع کی شکل میں لکھنا ممکن نہیں ہوگا۔

۴۰۰۔ سلسلۂ ہندسیہ ا، ار، ا$ر^۲$، ا$ر^۳$، ا$ر^۴$، ..... کے متواتر فرقوں کے سلسلے ہیں: ا(ر − ۱)، ا(ر − ۱)ر، ا(ر − ۱)$ر^۲$، ا(ر − ۱)$ر^۳$

ا(ر − ۱)$ر^ن$ .....

ا$(ر-۱)^۲$، ا$(ر-۱)^۲$ر، ا$(ر-۱)^۲ ر^۲$، ا$(ر-۱)^۲ ر^۳$،

ا$(ر-۱)^م ر^ن$ ....

اوپر کے سب سلسلے ہندسی سلسلے ہیں جن کی مشترک نسبت ابتدائی سلسلہ کی مشترک نسبت ر کے مساوی ہے۔

۴۰۱۔ اب ہم ایک ایسے سلسلہ پر غور کرتے ہیں جس کی ن ویں رقم ہے

$$ع_ن = ا\,ر^{ن-۱} + ف(ن)$$

جہاں ف (ن)، ن میں ق ابعاد کا تفاعل ہے۔ اس سلسلہ سے متواتر فرقوں کے رتبے بناؤ، تب ان مختلف رتبوں کے سلسلوں میں سے کسی ایک سلسلہ کی ہر ایک رقم دو حصوں کے مجموعہ پر مشتمل ہوتی ہے، ایک حصہ وہ جو ابتدائی سلسلہ کی ا رⁿ⁻¹ کی شکل کی رقم سے حاصل ہوتا ہے اور دوسرا وہ جو ابتدائی سلسلہ کی ف (ن) کی شکل کی رقم سے حاصل ہوتا ہے، نیز چونکہ ف (ن)، ق ابعاد کا جملہ ہے اس لئے متواتر فرقوں کے رتبوں کی ہر ایک رقم کا وہ حصہ جو ف (ن) سے حاصل ہوتا ہے (ق + ۱) ویں رتبہ کے (اور نیز بعد کے فرقوں کے رتبوں) میں صفر ہوگا۔ اس لئے یہ سلسلے ہندسی سلسلے ہوں گے جن کی مشترک نسبت ر ہوگی (دیکھو دفعہ ۴۰۰)

پس اگر کسی سلسلہ کی چند ابتدائی رقمیں دی ہوئی ہوں اور ان رقموں کے ف ویں فرق کے رتبے سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں جس کی مشترک نسبت ر ہو تو ہم فرض کر سکتے ہیں کہ دئے ہوئے سلسلہ کی عام رقم

ا رⁿ⁻¹ + ف (ن) ہوگی جہاں ف (ن)، ن میں (ق - ۱) ابعاد کا کوئی ناطق صحیح تفاعل ہے۔

مثال۔ سلسلہ ۱۰، ۲۳، ۶۰، ۱۶۹، ۴۹۴ ....

کی ن ویں رقم معلوم کرو۔

متواتر فرقوں کے رتبے یہ ہیں۔

۱۳، ۳۷، ۱۰۹، ۳۲۵

۲۴، ۷۲، ۲۱۶، .....

پس دوسرے فرق کے رتبے ہندسی سلسلہ میں ہیں جسکی مشترک نسبت ۳ ہے، اس لئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ عام رقم

$ع_ن = ا \times ۳^{ن-۱} + ب ن + ج$ ہے

مستقلات ا، ب، ج کو معلوم کرنے کے لئے ن کو بالترتیب ۱، ۲، ۳.... کے مساوی رکھو

تب $ا + ب + ج = ۱۰$، $۳ا + ۲ب + ج = ۲۳$، $۹ا + ۳ب + ج = ۶۰$

ان مساواتوں سے $ا = ۶$، $ب = ۱$، $ج = ۳$

لہذا $ع_ن = ۶ \times ۳^{ن-۱} + ن + ۳ = ۲ \times ۳^{ن} + ن + ۳$

۴۰۲ — متوالی سلسلوں کی جو مثالیں ہم نے اوپر بیان کی ہیں وہ سب کی سب ایسی ہیں کہ ان سے متواتر فرقوں کے رتبوں کے سلسلے بناکر ہم بالآخر ایک ایسے سلسلہ پر پہنچ جاتے ہیں جس کی رقوم کی تعبیر کا قانون محض دیکھنے سے معلوم ہو جاتا ہے، اس سے ہم ابتدائی سلسلہ کی ن ویں رقم کے لئے عام جملہ معلوم کر سکتے ہیں۔

لیکن اگر متوالی سلسلہ چند ایسے ہندسی سلسلوں کے حاصل جمع کے مساوی ہو جنکی مشترک نسبتیں بالترتیب ا، ب، ج... ہوں تو ظاہر ہے کہ متوالی سلسلہ کی عام رقم

$ا_۱ ا^{ن-۱} + ب_۱ ب^{ن-۱} + ج_۱ ج^{ن-۱}$ ....

کی شکل کی ہوگی اور اس لئے فرقوں کے متواتر رتبوں میں عام رقم اس شکل کی ہوگی یعنی فرقوں کے سب رتبوں میں سلسلے اسی کلیہ کے تحت بنینگے جس کے تحت ابتدائی سلسلہ بنا ہے۔ اس صورت میں سلسلہ کی عام رقم معلوم کرنیکے لئے ہمیں زیادہ عام طریقہ اختیار کرنا پڑے گا جس کی

تشریح چوبیسویں باب میں ہو چکی ہے۔ لیکن جب سر تعداداً بڑے ہوں تو ربط کا پیمانہ بہت سے پُر مشقت حسابی عمل کے بعد حاصل ہوتا ہے۔ پس عام طور پر متواتر فرقوں کے رتبوں کے چند سلسلے لکھ لینا زیادہ مناسب ہوتا ہے تاکہ یہ معلوم ہو سکے کہ آیا کہ کسی ایسے سلسلہ پر پہنچنا ممکن ہے جس کی رقوم کی تعبیر کا قانون از خود بیّن اور ظاہر ہو۔

۳۰۴۔ متذکرۂ بالا اصولوں کی مزید توضیح کے لئے ہم چند مثالیں ذیل میں درج کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ سلسلۂ ذیل

$$\frac{5}{2\times 1}\times\frac{1}{3}+\frac{7}{3\times 2}\times\frac{1}{3^2}+\frac{9}{4\times 3}\times\frac{1}{3^3}+\frac{11}{5\times 4}\times\frac{1}{3^4}+\cdots$$

کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

یہاں $\text{ع}_{\text{ن}}=\frac{2\text{ن}+3}{\text{ن}(\text{ن}+1)}\times\frac{1}{3^{\text{ن}}}$

فرض کرو $\frac{2\text{ن}+3}{\text{ن}(\text{ن}+1)}=\frac{\text{ا}}{\text{ن}}+\frac{\text{ب}}{\text{ن}+1}$

پس ا = ۳، ب = -۱

اس لئے $\text{ع}_{\text{ن}}=\frac{1}{3^{\text{ن}}}\left(\frac{3}{\text{ن}}-\frac{1}{\text{ن}+1}\right)=\frac{1}{\text{ن}}\times\frac{1}{3^{\text{ن}-1}}-\frac{1}{\text{ن}+1}\times\frac{1}{3^{\text{ن}}}$

لہٰذا حاصل جمع مطلوبہ = $\text{ج}_{\text{ن}}=1-\frac{1}{\text{ن}+1}\times\frac{1}{3^{\text{ن}}}$

مثال ۲۔ سلسلۂ ذیل

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{7\times 3}+\frac{5}{11\times 7\times 3}+\frac{7}{15\times 11\times 7\times 3}+\cdots$$

کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

ن ویں رقم $\dfrac{\text{۲ن} - ۱}{۳ \times ۷ \times ۱۱ \ldots\ldots (\text{۴ن} - ۵)(\text{۴ن} - ۱)}$ ہے

فرض کرو کہ $\dfrac{\text{۲ن} - ۱}{۳ \times ۷ \times ۱۱ \ldots\ldots \times (\text{۴ن} - ۵)(\text{۴ن} - ۱)}$

$= \dfrac{\text{ا}(\text{ن} + ۱) + \text{ب}}{۳ \times ۷ \times \ldots\ldots (\text{۴ن} - ۱)} - \dfrac{\text{ان} + \text{ب}}{۳ \times ۷ \times \ldots\ldots (\text{۴ن} - ۵)}$

$\therefore \text{۲ن} - ۱ = \text{ان} + (\text{ا} + \text{ب}) - (\text{ان} + \text{ب})(\text{۴ن} - ۱)$

سروں کو مساوی کرنے سے ہمیں ا اور ب کو معلوم کرنے کے لئے تین مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ لہذا ہمارا مفروضہ اس صورت میں درست ہوگا جبکہ ا اور ب کی وہ قیمتیں جو دو مساواتوں سے حاصل ہوں تیسری مساوات کو بھی پورا کریں۔

$\text{ن}^۲$ کے سروں کو مساوی کرنے سے ا = ۰۔

مطلق رقوم کو مساوی رکھنے سے ۲ب = -۱ ، یعنی ب = $-\frac{۱}{۲}$ ،

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ا اور ب کی یہ قیمتیں تیسری مساوات کو بھی پورا کرتی ہیں۔

$\therefore \text{ع}_\text{ن} = \dfrac{۱}{۲} \times \dfrac{۱}{۳ \times ۷ \times \ldots \times (\text{۴ن} - ۵)} - \dfrac{۱}{۲} \times \dfrac{۱}{۳ \times ۷ \times \ldots\ldots (\text{۴ن} - ۵)(\text{۴ن} - ۱)}$

لہذا $\text{ج}_\text{ن} = \dfrac{۱}{۲} - \dfrac{۱}{۲} \times \dfrac{۱}{۳ \times ۷ \times ۱۱ \times \ldots\ldots \times (\text{۴ن} - ۱)}$

مثال ۳۔ سلسلۂ ذیل

$۶ \times ۹ + ۱۲ \times ۲۱ + ۲۰ \times ۳۷ + ۳۰ \times ۵۷ + ۴۲ \times ۸۱ + \ldots\ldots$

کو ن رقموں تک جمع کرو۔

دفعہ ۳۹۶ یا ۳۹۷ کے طریقہ کی رو سے ہم پہلے سلسلہ

۶ ، ۱۲ ، ۲۰ ، ۳۰ ، ۴۲ ، ....

کی ن ویں رقم معلوم کرتے ہیں جو $ن^2 + ۳ن + ۲$ ہے،
نیز سلسلہ

۹، ۲۱، ۳۷، ۵۷، ۸۱، ....

کی ن ویں رقم $۲ن^2 + ۶ن + ۱$ ہے۔

اسلئے $ع_ن = (ن+۱)(ن+۲)\{۲ن(ن+۳)+۱\}$

$= ۲ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳) + (ن+۱)(ن+۲)$

$\therefore ج_ن = \frac{۲}{۵}ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(ن+۴)$

$+ \frac{۱}{۳}ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)۔۲$

مثال ۴۔ سلسلۂ ذیل

$۲\times۲ + ۴\times۶ + ۸\times۱۲ + ۱۶\times۲۰ + ۳۲\times۳۰ + ...$

کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

سلسلۂ ۲، ۶، ۱۲، ۲۰، ۳۰، .... کی ن ویں رقم $ن^2 + ن$ ہے

لہذا $ع_ن = (ن^2 + ن)۲^ن$

اب فرض کرو کہ $(ن^2 + ن)۲^ن = (ا ن^2 + ب ن + ج)۲^ن$

$- \{ا(ن-۱)^2 + ب(ن-۱) + ج\}\times ۲^{ن-۱}$

$۲^{ن-۱}$ پر تقسیم کرنے اور ن کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کرنے سے

$۲ = ا$، $۲ = ۲ا + ب$، $۰ = ج - ا + ب$..........

$\therefore$ $ا = ۲$، $ب = -۲$، $ج = ۴$

$\therefore ع_ن = (۲ن^2 - ۲ن + ۴)۲^ن - \{۲(ن-۱)^2 - ۲(ن-۱) + ۴\}۲^{ن-۱}$

اور $ج_ن = (۲ن^2 - ۲ن + ۴)۲^ن - ۴ = (ن^2 - ن + ۲)۲^{ن+۱} - ۴$

امثلہ نمبری ۲۹ (ب)

ذیل کے سلسلوں کی ن ویں رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۔ ۴، ۱۴، ۳۰، ۵۲، ۸۰، ۱۱۴ ....

۲۔ ۸، ۲۶، ۵۴، ۹۲، ۱۴۰، ۱۹۸ ....

۳۔ ۲، ۱۲، ۳۶، ۸۰، ۱۵۰، ۲۵۲ ....

۴۔ ۸، ۱۶، ۰، −۶۴، −۲۰۰، −۴۳۲ ....

۵۔ ۳۰، ۱۴۴، ۴۲۰، ۹۶۰، ۱۸۹۰، ۳۳۶۰ ....

ذیل کے سلسلوں کے تکوینی تفاعل معلوم کرو

۶۔ $۱ + ۳لا + ۷لا^{۲} + ۱۳لا^{۳} + ۲۱لا^{۴} + ۳۱لا^{۵} + \cdots$

۷۔ $۱ + ۲لا + ۹لا^{۲} + ۲۰لا^{۳} + ۳۵لا^{۴} + ۵۴لا^{۵} + \cdots$

۸۔ $۲ + ۵لا + ۱۰لا^{۲} + ۱۷لا^{۳} + ۲۶لا^{۴} + ۳۷لا^{۵} + \cdots$

۹۔ $۱ - ۳لا + ۵لا^{۲} - ۷لا^{۳} + ۹لا^{۴} - ۱۱لا^{۵} + \cdots$

۱۰۔ $۱^{۴} + ۲^{۴}لا + ۳^{۴}لا^{۲} + ۴^{۴}لا^{۳} + ۵^{۴}لا^{۴} + \cdots$

ذیل کے لامتناہی سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۱۔ $\frac{۱\times۲}{۳} + \frac{۲\times۳}{۳^{۲}} + \frac{۳\times۴}{۳^{۳}} + \frac{۴\times۵}{۳^{۴}} + \cdots$

۱۲۔ $۱^{۲} - \frac{۲^{۲}}{۵} + \frac{۳^{۲}}{۵^{۲}} - \frac{۴^{۲}}{۵^{۳}} + \frac{۵^{۲}}{۵^{۴}} - \frac{۶^{۲}}{۵^{۵}} + \cdots$

ذیل کے سلسلوں کی عام رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۳۔ ۹، ۱۶، ۲۹، ۵۴، ۱۰۳، ....

۱۴۔ −۳، −۱، ۱۱، ۳۹، ۸۹، ۱۶۷، ....

۱۵- ۲، ۵، ۱۲، ۳۱، ۸۶، ....

۱۶- ۱، ۰، ۱، ۸، ۲۹، ۸۰، ۱۹۳، ....

۱۷- ۴، ۱۳، ۳۵، ۹۴، ۲۶۲، ۷۵۵، ....

ذیل کے سلسلوں میں سے ہر ایک کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۸- $۱ + ۲\text{لا} + ۳\text{لا}^{۲} + ۴\text{لا}^{۳} + ۵\text{لا}^{۴} + \cdots$

۱۹- $۱ + ۳\text{لا} + ۶\text{لا}^{۲} + ۱۰\text{لا}^{۳} + ۱۵\text{لا}^{۴} + \cdots$

۲۰- $\frac{۳}{۱\times۲}\times\frac{۱}{۲} + \frac{۴}{۲\times۳}\times\frac{۱}{۲^{۲}} + \frac{۵}{۳\times۴}\times\frac{۱}{۲^{۳}} + \frac{۶}{۴\times۵}\times\frac{۱}{۲^{۴}} + \cdots$

۲۱- $\frac{۲^{۱}}{۲\times۳}\times۴ + \frac{۲^{۲}}{۳\times۴}\times۴^{۲} + \frac{۲^{۳}}{۴\times۵}\times۴^{۳} + \frac{۲^{۴}}{۵\times۶}\times۴^{۴} + \cdots$

۲۲- $۳\times۴ + ۸\times۱۱ + ۱۵\times۲۰ + ۲۴\times۳۱ + ۳۵\times۴۴ + \cdots$

۲۳- $۱\times۳ + ۴\times۷ + ۹\times۱۳ + ۱۶\times۲۱ + ۲۵\times۳۱ + \cdots$

۲۴- $۱\times۵ + ۲\times۱۵ + ۳\times۳۱ + ۴\times۵۳ + ۵\times۸۱ + \cdots$

۲۵- $\frac{۱}{۱\times۳} + \frac{۲}{۱\times۳\times۵} + \frac{۳}{۱\times۳\times۵\times۷} + \frac{۴}{۱\times۳\times۵\times۷\times۹} + \cdots$

۲۶- $\frac{۱\times۲}{\underline{۳|}} + \frac{۲\times۲^{۲}}{\underline{۴|}} + \frac{۳\times۲^{۳}}{\underline{۵|}} + \frac{۴\times۲^{۴}}{\underline{۶|}} + \cdots$

۲۷- $۲\times۲ + ۴\times۴ + ۷\times۸ + ۱۱\times۱۶ + ۱۶\times۳۲ + \cdots$

۲۸- $۱\times۳ + ۳\times۳^{۲} + ۵\times۳^{۳} + ۷\times۳^{۴} + ۹\times۳^{۵}\times\cdots$

۲۹- $\frac{۱}{۲\times۳} + \frac{۱\times۳}{۲\times۴\times۶} + \frac{۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶\times۸} + \frac{۱\times۳\times۵\times۷}{۲\times۴\times۶\times۸\times۱۰} + \cdots$

۳۰- $\frac{۲}{۱\times۲} + \frac{۵}{۲\times۳}\times۲ + \frac{۱۰}{۳\times۴}\times۲^{۲} + \frac{۱۷}{۴\times۵}\times۲^{۳} + \cdots$

۳۱- $\frac{4}{3\times2\times1}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{4\times3\times2}\times\frac{1}{3}+\frac{6}{5\times4\times3}\times\frac{1}{3}+\cdots$

۳۲- $\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{5}{\underline{|4}}+\frac{11}{\underline{|5}}+\frac{19}{\underline{|6}}+\cdots\cdots$

۳۳- $\frac{19}{3\times2\times1}\times\frac{1}{4}+\frac{28}{4\times3\times2}\times\frac{1}{8}+\frac{39}{5\times4\times3}\times\frac{1}{16}+\frac{52}{6\times5\times4}\times\frac{1}{32}+\cdots\cdots$

۴۴- بہت سے سلسلے ایسے ہیں جو کسی خاص کلیّہ کے ماتحت جمع نہیں کئے جا سکتے۔ بعض اوقات متذکرہ بالا قاعدوں میں مناسب تغیر تبدل کرنا کافی ہوتا ہے بعض صورتوں میں جمع کا عمل چند معلومہ سلسلوں (مثلاً مسئلہ ثنائی کا سلسلہ، لوکارثمی سلسلہ، قوت نما سلسلہ) کے خواص پر مبنی ہوتا ہے۔

مثال ۱- ذیل کے لامتناہی سلسلہ

$$\frac{2}{\underline{|1}}+\frac{12}{\underline{|2}}+\frac{28}{\underline{|3}}+\frac{50}{\underline{|4}}+\frac{78}{\underline{|5}}+\cdots\cdots$$

کا حاصل جمع معلوم کرو۔

سلسلہ ۲، ۱۲، ۲۸، ۵۰، ۷۸، ... کی ن ویں رقم ۳ ن^2 + ن - ۲ ہے

اسلئے $ع_ن = \frac{3ن^2+ن-2}{\underline{|ن}} = \frac{3ن(ن-1)+4ن-2}{\underline{|ن}}$

$$= \frac{3}{\underline{|ن-2}}+\frac{4}{\underline{|ن-1}}-\frac{2}{\underline{|ن}}$$

ن کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ...... کے برابر فرض کرنے سے

$ج_۱ = ۴ - \frac{۲}{|۱}$ ، $ج_۲ = ۳ + \frac{۴}{|۱} - \frac{۲}{|۲}$ ، $ج_۳ = \frac{۳}{|۱} + \frac{۴}{|۲} - \frac{۲}{|۳}$

اور علیٰ ہٰذا القیاس

اِس سے $ج_ن = ۳ن + ۴ن - ۲(ن - ۱) = ۵ن + ۲$

مثال ۲ ۔ اگر $(۱ + لا)^ن = ج + ج_۱ لا + ج_۲ لا^۲ + ج_۳ لا^۳ + \dots + ج_ن لا^ن$

تو $۱^۲ ج_۱ + ۲^۲ ج_۲ + ۳^۲ ج_۳ + ۴^۲ ج_۴ + \dots + ن^۲ ج_ن$ کی قیمت دریافت کرو۔

دفعہ ۳۹۸ کی طرح ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$۱^۲ + ۲^۲ لا + ۳^۲ لا^۲ + ۴^۲ لا^۳ + \dots + ن^۲ لا^{ن-۱} + \dots = \frac{۱ + لا}{(۱ - لا)^۳}$$

نیز $ج_ن + ج_{ن-۱} لا + \dots + ج_۲ لا^{ن-۲} + ج_۱ لا^{ن-۱} + ج_۰ لا^ن = (۱ + لا)^ن$

اِن دونوں نتیجوں کو باہم ضرب دو، تب سلسلہ زیرِ بحث $\frac{(۱ + لا)^{ن+۱}}{(۱ - لا)^۳}$

کی یعنی $\frac{(۲ - \overline{۱ - لا})^{ن+۱}}{(۱ - لا)^۳}$ کی تفصیل میں $لا^{ن-۱}$ کے سر کے مساوی

ہے یعنی اِس تفصیل کی وہ رقمیں جن سے $لا^{ن-۱}$ حاصل ہو سکتا ہے وہ

$$۲^{ن+۱}(۱ - لا)^{-۳} - (ن + ۱)۲^ن(۱ - لا)^{-۲} + \frac{(ن + ۱)ن}{|۲} ۲^{ن-۱}(۱ - لا)^{-۱}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

$\therefore$ دیا ہوا سلسلہ $= \frac{ن(ن + ۱)}{|۲} ۲^{ن+۱} - ن(ن + ۱)۲^ن + \frac{ن(ن + ۱)}{|۲} ۲^{ن-۱}$

$$= \text{ن}\,(\text{ن} + ۱)\, ۲^{\text{ن}-۲}$$

مثال ۳۔ اگر ب = ا + ۱ اور ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{ب}^{\text{ن}} - (\text{ن}-۱)\,\text{ا}\,\text{ب}^{\text{ن}-۲} + \frac{(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۳)}{|۲}\,\text{ا}^{۲}\,\text{ب}^{\text{ن}-۴}$$

$$- \frac{(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۵)}{|۳}\,\text{ا}^{۳}\,\text{ب}^{\text{ن}-۶} + \dots\dots$$

کی قیمت معلوم کرو۔

مسئلہ ثنائی کی رُو سے

$$۱،\ \text{ن}-۱،\ \frac{(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۲)}{|۲}،\ \frac{(\text{ن}-۵)(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۳)}{|۳}\ \dots\ \text{وغیرہ وغیرہ}$$

$(۱-\text{لا})^{-۱}،\ (۱-\text{لا})^{-۲}،\ (۱-\text{لا})^{-۳}،\ (۱-\text{لا})^{-۴} \dots\dots$ کی تفصیلوں میں بالترتیب $\text{لا}^{\text{ن}}،\ \text{لا}^{\text{ن}-۲}،\ \text{لا}^{\text{ن}-۴}،\ \text{لا}^{\text{ن}-۶} \dots\dots$ کے سر ہیں، پس حاصل جمع مطلوبہ سلسلۂ ذیل

$$\frac{۱}{۱-\text{ب لا}} - \frac{\text{ا لا}^{۲}}{(۱-\text{ب لا})^{۲}} + \frac{\text{ا}^{۲}\,\text{لا}^{۴}}{(۱-\text{ب لا})^{۳}} - \frac{\text{ا}^{۳}\,\text{لا}^{۶}}{(۱-\text{ب لا})^{۴}} + \dots\dots$$

کی تفصیل میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کے سر کے مساوی ہے اور اگرچہ دیا ہوا جملہ رقوم کی ایک محدود تعداد پر مشتمل ہے لیکن ہم اس سلسلہ کو لامتناہی بھی خیال کر سکتے ہیں۔

$$\text{لیکن سلسلہ کا حاصل جمع} = \frac{۱}{۱-\text{ب لا}} \div \left(۱ + \frac{\text{ا لا}^{۲}}{۱-\text{ب لا}}\right) = \frac{۱}{۱-\text{ب لا} + \text{ا لا}^{۲}}$$

$$= \frac{۱}{۱-(\text{ا}+۱)\,\text{لا} + \text{ا لا}^{۲}} \quad \text{کیونکہ ب} = \text{ا} + ۱$$

لہٰذا دیا ہوا سلسلہ = $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $\frac{1}{(1-\text{لا})(1-\text{ا لا})}$ کی تفصیل میں

= $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $\frac{1}{\text{ا}-1}\left(\frac{\text{ا}}{1-\text{ا لا}}-\frac{1}{1-\text{لا}}\right)$ کی تفصیل میں

$$=\frac{\text{ا}^{\text{ن}+1}-1}{\text{ا}-1}$$

مثال ۴۔ اگر سلسلوں

$$1+\frac{\text{لا}^3}{\underline{|3}}+\frac{\text{لا}^6}{\underline{|6}}+\cdots\text{،}\quad \text{لا}+\frac{\text{لا}^4}{\underline{|4}}+\frac{\text{لا}^7}{\underline{|7}}+\cdots$$

$$\frac{\text{لا}^2}{\underline{|2}}+\frac{\text{لا}^5}{\underline{|5}}+\frac{\text{لا}^8}{\underline{|8}}+\cdots\cdots$$

کو بالترتیب ا، ب، ج سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^3+\text{ب}^3+\text{ج}^3-3\,\text{ا ب ج}=1$$

اگر ایک کا خیالی جذر الکعب سہ ہو تو

$$\text{ا}^3+\text{ب}^3+\text{ج}^3-3\,\text{ا ب ج}=(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ا}+\text{سہ ب}+\text{سہ}^2\text{ج})(\text{ا}+\text{سہ}^2\text{ب}+\text{سہ ج})$$

اب $\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}=1+\text{لا}+\frac{\text{لا}^2}{\underline{|2}}+\frac{\text{لا}^3}{\underline{|3}}+\frac{\text{لا}^4}{\underline{|4}}+\frac{\text{لا}^5}{\underline{|5}}+\cdots=\text{قو}^{\text{لا}}$

اور $\text{ا}+\text{سہ ب}+\text{سہ}^2\text{ج}=1+\text{سہ لا}+\frac{\text{سہ}^2\text{لا}^2}{\underline{|2}}+\frac{\text{سہ}^3\text{لا}^3}{\underline{|3}}+\frac{\text{سہ}^4\text{لا}^4}{\underline{|4}}+\frac{\text{سہ}^5\text{لا}^5}{\underline{|5}}+\cdots\cdots$

$$=\text{قو}^{\text{سہ لا}}$$

اسی طرح سے $ا + سہ^{۲} ب + سہ ج = قو^{سہ^{۲} لا}$

$\therefore ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} - ۳ ا ب ج = قو^{لا} \times قو^{سہ لا} \times قو^{سہ^{۲} لا} = قو^{(۱ + سہ + سہ^{۲}) لا} = ۱$

کیونکہ $۱ + سہ + سہ^{۲} = ۰$

۵۰۴ - پہلے ن طبعی اعداد کی ل ویں قوتوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ حاصل جمع مطلوبہ $ج_{ن}$ ہے، تب

$$ج_{ن} = ۱^{ل} + ۲^{ل} + ۳^{ل} + \ldots\ldots ن^{ل}$$

یہ تسلیم کرلو کہ

$$ج_{ن} = ا_{۰} ن^{ل+۱} + ا_{۱} ن^{ل} + ا_{۲} ن^{ل-۱} + ا_{۳} ن^{ل-۲} + \ldots\ldots + ا_{ل} ن + ا_{ل+۱} \ldots\ldots(۱)$$

جہاں $ا_{۰}$، $ا_{۱}$، $ا_{۲}$ ...... ایسی مقداریں ہیں جن کی قیمتیں ابھی معلوم کرنا باقی ہے۔

ن کی بجائے (ن + ۱) لکھنے اور تفریق کرنے سے

$$(ن+۱)^{ل} = ا_{۰}\{(ن+۱)^{ل+۱} - ن^{ل+۱}\} + ا_{۱}\{(ن+۱)^{ل} - ن^{ل}\}$$

$$+ ا_{۲}\{(ن+۱)^{ل-۱} - ن^{ل-۱}\} + ا_{۳}\{(ن+۱)^{ل-۲} - ن^{ل-۲}\} + \ldots$$

$$+ \ldots + ا_{ل} \ldots\ldots(۲)$$

$(ن+۱)^{ل+۱}$، $(ن+۱)^{ل}$، $(ن+۱)^{ل-۱}$ ... کو پھیلاؤ اور ن کی یکساں قوتوں کے سروں کو باہم مساوی رکھو، $ن^{ل}$ کے سر

مساوی رکھنے سے

$$۱ = \text{اِ}(\text{ر}+۱) \quad \text{یعنی} \quad \text{اِ} = \frac{۱}{\text{ر}+۱}$$

$\text{ن}^{\text{ر}-۱}$ کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$\text{ر} = \frac{\text{اِ}(\text{ر}+۱)\text{ر}}{۲} + \text{ا}_{۱}\,\text{ر}\text{، جس سے } \text{ا}_{۱} = \frac{۱}{۲}$$

اسی طرح $\text{ن}^{\text{ر}-\text{ق}}$ کے سروں کو مساوی رکھو اِ، ا۱ کی بجائے ان کی قیمتیں مندرج کرو اور مساوات کے دونوں جانب

$$\frac{|\text{ق}}{\text{ر}(\text{ر}-۱)(\text{ر}-۲)\cdots(\text{ر}-\text{ق}+۱)}$$

سے ضرب دو اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۱ = \frac{۱}{\text{ق}+۱} + \frac{۱}{۲} + \text{ا}_{۲}\frac{\text{ق}}{\text{ر}} + \text{ا}_{۳}\frac{\text{ق}(\text{ق}-۱)}{\text{ر}(\text{ر}-۱)} + \text{ا}_{۴}\frac{\text{ق}(\text{ق}-۱)(\text{ق}-۲)}{\text{ر}(\text{ر}-۱)(\text{ر}-۲)} + \cdots\cdots (۳)$$

(۱) میں ن کی بجائے (ن − ۱) رکھنے اور تفریق کرنے سے

$$\text{ن}^{\text{ر}} = \text{اِ}\{\text{ن}^{\text{ر}+۱} - (\text{ن}-۱)^{\text{ر}+۱}\} + \text{ا}_{۱}\{\text{ن}^{\text{ر}} - (\text{ن}-۱)^{\text{ر}}\}$$

$$+ \text{ا}_{۲}\{\text{ن}^{\text{ر}-۱} - (\text{ن}-۱)^{\text{ر}-۱}\} + \cdots\cdots$$

$\text{ن}^{\text{ر}-\text{ق}}$ کے سروں کو مساوی کرنے سے اور اِ، ا۱ کی بجائے ان کی قیمتیں مندرج کرنے سے

$$۰ = \frac{۱}{\text{ق}+۱} - \frac{۱}{۲} + \text{ا}_{۲}\frac{\text{ق}}{\text{ر}} - \text{ا}_{۳}\frac{\text{ق}(\text{ق}-۱)}{\text{ر}(\text{ر}-۱)} + \text{ا}_{۴}\frac{\text{ق}(\text{ق}-۱)(\text{ق}-۲)}{\text{ر}(\text{ر}-۱)(\text{ر}-۲)} - \cdots\cdots (۴)$$

(۳) اور (۴) کو بالترتیب جمع کرنے اور تفریق کرنے سے

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\text{ق}+1} = \text{ا}_2\frac{\text{ق}}{\text{ر}} + \text{ا}_4\frac{\text{ق}(\text{ق}-1)(\text{ق}-2)}{\text{ر}(\text{ر}-1)(\text{ر}-2)} + \dots\dots \quad (5)$$

اور
$$0 = \text{ا}_3\frac{\text{ق}(\text{ق}-1)}{\text{ر}(\text{ر}-1)} + \text{ا}_5\frac{\text{ق}(\text{ق}-1)(\text{ق}-2)(\text{ق}-3)}{\text{ر}(\text{ر}-1)(\text{ر}-2)(\text{ر}-3)} + \dots \quad (6)$$

اگر ق کو بالترتیب ۲، ۴، ۶ ..... قیمتیں دی جائیں تو (۶) سے ظاہر ہے کہ سروں ا_3، ا_5، ا_7 ..... میں سے ہر ایک صفر کے مساوی ہے اور (۵) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $\text{ا}_2 = \frac{1}{6}\,\frac{\text{ر}}{|\underline{2}}$،

$$\text{ا}_4 = -\frac{1}{30}\,\frac{\text{ر}(\text{ر}-1)(\text{ر}-2)}{|\underline{4}},\quad \text{ا}_6 = \frac{1}{42}\,\frac{\text{ر}(\text{ر}-1)(\text{ر}-2)(\text{ر}-3)(\text{ر}-4)}{|\underline{6}}$$

(۲) میں رقوم مطلق کو مساوی رکھنے سے

$$1 = \text{ا}_0 + \text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \dots\dots + \text{ا}_\text{ر}$$

اور مساوات (۱) میں ن = ۱ رکھنے سے

$$1 = \text{ا}_0 + \text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \dots\dots + \text{ا}_\text{ر} + \text{ا}_{\text{ر}+1}$$ پس $\text{ا}_{\text{ر}+1} = 0$۔

۴۰۶۔ دفعہ ماقبل کے نتیجہ کو ذیل کے آسان ضابطہ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{ج}_\text{ن} = \frac{\text{ن}^{\text{ر}+1}}{\text{ر}+1} + \frac{1}{2}\text{ن}^\text{ر} + \text{ب}_1\frac{\text{ر}}{|\underline{2}}\text{ن}^{\text{ر}-1} - \text{ب}_3\frac{\text{ر}(\text{ر}-1)(\text{ر}-2)}{|\underline{4}}\text{ن}^{\text{ر}-3}$$
$$+\,\text{ب}_5\frac{\text{ر}(\text{ر}-1)(\text{ر}-2)(\text{ر}-3)(\text{ر}-4)}{|\underline{6}}\text{ن}^{\text{ر}-5} + \dots\dots$$

جہاں $\text{ب}_1 = \frac{1}{6}$، $\text{ب}_3 = \frac{1}{30}$، $\text{ب}_5 = \frac{1}{42}$، $\text{ب}_7 = \frac{1}{30}$، $\text{ب}_9 = \frac{5}{66}$

اِن مقادیر $ب_۱$، $ب_۳$، $ب_۵$ ..... وغیرہ کو برنولی کے عدد کہتے ہیں، طالب علم چاہے تو دوسرے سلسلوں کے جمع کرنے میں اِن اعداد کے استعمال کے متعلق مزید مثالیں بُول کی مصنفہ کتاب محدود فرق (فائی نائیٹ ڈفرنس) میں ملاحظہ کر سکتا ہے۔

مثال۔ $۱^۵ + ۲^۵ + ۳^۵ + \cdots + ن^۵$ کی قیمت معلوم کرو

حسب قاعدہ مندرجہ بالا
$$ج_ن = \frac{ن^۶}{۶} + \frac{ن^۵}{۲} + ب_۱ \frac{۵}{|\underline{۲}} ن^۴ - ب_۳ \frac{۳ \times ۴ \times ۵}{|\underline{۴}} ن^۲ + ج$$
$$= \frac{ن^۶}{۶} + \frac{ن^۵}{۲} + \frac{۵ن^۴}{۱۲} - \frac{ن^۲}{۱۲} \quad \text{(مستقل صفر ہے)}$$

امثلہ نمبری ۲۹ (ج)

ذیل کے سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(۱) $\frac{لا^۳}{|\underline{۳}} + \frac{لا^۵}{|\underline{۵}} + \frac{لا^۷}{|\underline{۷}} + \cdots\cdots$

(۲) $\frac{لا}{۱ \times ۲} + \frac{لا^۲}{۲ \times ۳} + \frac{لا^۳}{۳ \times ۴} + \cdots\cdots$

(۳) $لا + \frac{لا^۵}{|\underline{۵}} + \frac{لا^۹}{|\underline{۹}} + \cdots\cdots$

(۴) $\frac{۱}{|\underline{ر}} + \frac{|\underline{۲}}{|\underline{ر+۱}} + \frac{|\underline{۳}}{|\underline{ر+۲}} + \cdots\cdots$

(۵) $\text{۱} + \text{۲لا} + \frac{\text{۲}^{\text{۲}}-\text{۱}}{\underline{|\text{۲}}} \times \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۱}} + \frac{\text{۳}^{\text{۲}}-\text{۱}}{\underline{|\text{۳}}} \times \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۲}} + \frac{\text{۴}^{\text{۲}}-\text{۱}}{\underline{|\text{۴}}} \times \frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{\text{۳}} + \cdots$

(۶) $\frac{\text{ف}_{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}} + \frac{\text{ف}_{\text{ر}-\text{۱}}}{\underline{|\text{ر}-\text{۱}}} \times \frac{\text{ق}}{\text{۱}} + \frac{\text{ف}_{\text{ر}-\text{۲}}}{\underline{|\text{ر}-\text{۲}}} \times \frac{\text{ق}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} + \frac{\text{ف}_{\text{ر}-\text{۳}}}{\underline{|\text{ر}-\text{۳}}} \times \frac{\text{ق}^{\text{۳}}}{\underline{|\text{۳}}}$

$+ \cdots\cdots$ (ر + ۱) رقموں تک

(۷) $\frac{\text{ن}(\text{۱}+\text{لا})}{\text{۱}+\text{ن لا}} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{۱})}{\underline{|\text{۲}}} \times \frac{\text{۱}+\text{۲لا}}{(\text{۱}+\text{ن لا})^{\text{۲}}}$

$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{۱})(\text{ن}-\text{۲})}{\underline{|\text{۳}}} \times \frac{\text{۱}+\text{۳لا}}{(\text{۱}+\text{ن لا})^{\text{۳}}} \cdots\cdots$ ن رقموں تک

(۸) $\text{۱} + \text{۳} \frac{\text{۲ن}+\text{۱}}{\text{۲ن}-\text{۱}} + \text{۵}\left(\frac{\text{۲ن}+\text{۱}}{\text{۲ن}-\text{۱}}\right)^{\text{۲}} + \cdots$ ن رقموں تک

(۹) $\text{۱} - \frac{\text{ن}^{\text{۲}}}{\text{۱}^{\text{۲}}} + \frac{\text{ن}^{\text{۲}}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})}{\text{۱}^{\text{۲}} \times \text{۲}^{\text{۲}}} - \frac{\text{ن}^{\text{۲}}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۲}^{\text{۲}})}{\text{۱}^{\text{۲}} \times \text{۲}^{\text{۲}} \times \text{۳}^{\text{۲}}}$

$+ \cdots\cdots$ (ن + ۱) رقموں تک

(۱۰) $(\text{۱}+\text{۲}) \text{لوگ}_{\text{و}}\text{۲} + \frac{\text{۱}+\text{۲}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}}(\text{لوگ}_{\text{و}}\text{۲})^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}+\text{۲}^{\text{۳}}}{\underline{|\text{۳}}}(\text{لوگ}_{\text{و}}\text{۲})^{\text{۳}} + \cdots$

(۱۱) $\frac{\text{۱}}{\text{۱}\times\text{۲}\times\text{۳}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}\times\text{۴}\times\text{۵}} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}\times\text{۶}\times\text{۷}} + \cdots\cdots$

(۱۲) $\frac{\text{۲}}{\underline{|\text{۱}}} + \frac{\text{۳}}{\underline{|\text{۲}}} + \frac{\text{۶}}{\underline{|\text{۳}}} + \frac{\text{۱۱}}{\underline{|\text{۴}}} + \frac{\text{۱۸}}{\underline{|\text{۵}}} + \cdots$

(۱۳) $\text{۱} + \frac{\text{۲لا}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} - \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\underline{|\text{۳}}} + \frac{\text{۷لا}^{\text{۴}}}{\underline{|\text{۴}}} - \frac{\text{۲۳لا}^{\text{۵}}}{\underline{|\text{۵}}} + \frac{\text{۱۲۱لا}^{\text{۶}}}{\underline{|\text{۶}}} \cdots$

(۱۴) ضابطہ متعلقہ کو استعمال کئے بغیر سلاسل ذیل کا حاصل

جمع معلوم کرو۔

(۱) $۱^{۶} + ۲^{۶} + ۳^{۶} + \dots\dots + ن^{۶}$

(۲) $۱^{۵} + ۲^{۵} + ۳^{۵} + \dots\dots + ن^{۵}$

(۱۵) سلسلہ ذیل کا حاصل جمع معلوم کرو

$$۱^{۳} + ۲^{۳} + \frac{۳^{۳}}{\underline{|۲}} + \frac{۴^{۳}}{\underline{|۳}} + \frac{۵^{۳}}{\underline{|۴}} + \dots\dots\dots$$

(۱۶) ثابت کرو کہ $\frac{لا}{(۱-لا)^{۲} - ج\,لا}$ کی تفصیل میں $لا^{ن}$ کا سر یہ ہے

$$ن\left\{۱ + \frac{ن^{۲}-۱}{\underline{|۳}}ج + \frac{(ن^{۲}-۱)(ن^{۲}-۴)}{\underline{|۵}}ج^{۲} + \frac{(ن^{۲}-۱)(ن^{۲}-۴)(ن^{۲}-۹)}{\underline{|۷}}ج^{۳} + \dots\dots\dots\right\}$$

(۱۷) اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہو تو سلسلہ

$$۲^{ن} - (ن-۱)۲^{ن-۲} + \frac{(ن-۲)(ن-۳)}{\underline{|۲}}۲^{ن-۴} - \frac{(ن-۳)(ن-۴)(ن-۵)}{\underline{|۳}}۲^{ن-۶} + \dots$$

کا حاصل جمع معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر ن، ۳ کا کوئی ضعف ہو تو

$$۱ - (ن-۱) + \frac{(ن-۲)(ن-۳)}{\underline{|۲}} - \frac{(ن-۳)(ن-۴)(ن-۵)}{\underline{|۳}} + \dots = (-۱)^{ن}$$

(۱۸) اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو جو ۳ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ

$$ن^{۳} + \frac{ن(ن-۱)}{\underline{|۲}}(ن-۲)^{۳} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{\underline{|۴}}(ن-۴)^{۳} + \dots\dots = ن^{۲}(ن+۳)۲^{ن-۴}$$

(۱۹) ذیل کے دو سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(۱) $\frac{۱}{۱+۱^{۲}+۱^{۴}} + \frac{۲}{۱+۲^{۲}+۲^{۴}} + \frac{۳}{۱+۳^{۲}+۳^{۴}} + \dots\dots\dots$

(۲) $\frac{۵}{۲\times۱} - \frac{۳}{۳\times۲} + \frac{۹}{۴\times۳} - \frac{۷}{۵\times۴} + \frac{۱۳}{۶\times۵} - \frac{۱۱}{۷\times۶} + \frac{۱۷}{۸\times۷} - \ldots\ldots$

(۲۰) ایک لاتناہی سلسلہ کی ن ویں رقم $\frac{(-۱)^{ن+۱}\, لا^{ن}}{ن(ن+۱)(ن+۲)}$ ہے سلسلہ کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(۲۱) اگر $(۱+لا)^{ن} = ج + ج_۱ لا + ج_۲ لا^۲ + ج_۳ لا^۳ + \ldots + ج_ن لا^ن$ جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے تو

$(ن-۱)^۲ ج_۱ + (ن-۳)^۲ ج_۳ + (ن-۵)^۲ ج_۵ + \ldots\ldots$

کی قیمت معلوم کرو۔

(۲۲) ذیل کے سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو

(۱) $\frac{۲}{۵\times۱} - \frac{۴}{۷\times۵} + \frac{۸}{۱۷\times۷} - \frac{۱۶}{۳۱\times۱۷} + \frac{۳۲}{۶۵\times۳۱} - \ldots$

(۲) $\frac{۷}{۳\times۲\times۱} \quad \frac{۱۷}{۴\times۳\times۲} + \frac{۳۱}{۵\times۴\times۳} - \frac{۴۹}{۶\times۵\times۴} + \frac{۷۱}{۷\times۶\times۵} - \ldots$

(۲۳) ثابت کرو کہ $ر < ۱$ تو $(۱+ر لا)(۱+ر^۳ لا)(۱+ر^۵ لا)\ldots$

$= ۱ + \frac{ر لا}{۱-ر^۲} + \frac{ر^۴ لا^۲}{(۱-ر^۲)(۱-ر^۴)} + \frac{ر^۹ لا^۳}{(۱-ر^۲)(۱-ر^۴)(۱-ر^۶)} + \ldots\ldots$

(۲۴) اگر $(۱+لا)^۲ \left(۱+\frac{لا}{۱}\right)^۲ \left(۱+\frac{لا}{۲^۲}\right)^۲ \left(۱+\frac{لا}{۳^۲}\right)^۲ \ldots$

کی تفصیل میں $لا^ر$ کا سر $ک_ر$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$ل_ر = \frac{۲}{ر - ۱} (ل_{ر-۱} + ل_{ر-۲}) \text{ اور } ل_۴ = \frac{۱۰۷۲}{\lfloor ۵}$$

(۲۵) اگر ن، ۲ کا کوئی ضعف ہو تو ثابت کرو کہ ذیل کے دو سلاسل میں سے ہر ایک صفر کے مساوی ہے۔

$$ن - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۳} \times ۳ + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)(ن-۴)}{\lfloor ۵} \times ۳^۲ \ldots\ldots$$

$$ن - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۳} \times \frac{۱}{۳} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)(ن-۴)}{\lfloor ۵} \times \frac{۱}{۳^۲} - \ldots\ldots$$

(۲۶) اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$(ف+ق)^ن - (ن-۱) ف ق (ف+ق)^{ن-۲} + \frac{(ن-۲)(ن-۳)}{\lfloor ۲} ف^۲ ق^۲ (ف+ق)^{ن-۴}$$

$$- \ldots\ldots = \frac{ف^{ن+۱} - ق^{ن+۱}}{ف - ق}$$

(۲۷) اگر $ف_ر = (ن - ر)(ن - ر + ۱)(ن - ر + ۲) \ldots (ن - ر + ف - ۱)$

$$ق_ر = ر (ر + ۱)(ر + ۲) \ldots\ldots (ر + ق - ۱)$$

تو ثابت کرو کہ

$$ف_۱ ق_۱ + ف_۲ ق_۲ + ف_۳ ق_۳ + \ldots\ldots + ف_{ن-۱} ق_{ن-۱} = \frac{\lfloor ف \lfloor ق \lfloor ن-۱+ف+ق}{\lfloor ف+ق+۱ \lfloor ن-۲}$$

(۲۸) اگر ن، ۳ کا کوئی ضعف ہو تو ثابت کرو کہ

$$۱ - \frac{ن-۳}{\lfloor ۲} + \frac{(ن-۴)(ن-۵)}{\lfloor ۳} - \frac{(ن-۵)(ن-۶)(ن-۷)}{\lfloor ۴} + \ldots$$

$$+ (-۱)^{ر-۱} \frac{(ن-ر-۱)(ن-ر-۲) \ldots\ldots (ن-۲ر+۱)}{\lfloor ر} + \ldots$$

$\frac{۱}{ن}$ کے مساوی ہے۔ اگر ن طاق ہو اور $\frac{۳}{ن}$ کے مساوی ہے اگر ن جفت ہو۔

(۲۹) اگر لا کوئی کسر واجب ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{لا}{۱-لا^{۲}} - \frac{لا^{۳}}{۱-لا^{۶}} + \frac{لا^{۵}}{۱-لا^{۱۰}} - \cdots\cdots$$

$$= \frac{لا}{۱+لا^{۲}} + \frac{لا^{۳}}{۱+لا^{۶}} + \frac{لا^{۵}}{۱+لا^{۱۰}} + \cdots\cdots$$



تیسواں باب

عددوں کا نظریہ

۴۰۷- اس باب میں ہم لفظ عدد کو مثبت صحیح عدد کے معنوں میں استعمال کرینگے۔

وہ عدد جو سوائے اپنے آپ کے اور ایک کے کسی دوسرے عدد پر پورا تقسیم نہ ہو سکے عددِ مفرد یا محض مفرد کہلاتا ہے۔ برعکس اسکے جو عدد اپنے اور ایک کے سوائے کسی دوسرے عدد پر بھی پورا تقسیم ہو سکے مرکب عدد کہلاتا ہے مثلاً ۵۳ عدد مفرد ہے اور ۳۵ عدد مرکب۔ دو عدد جن میں سوائے ایک کے کوئی مشترک جزو ضربی نہ ہو بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد عدد کہلاتے ہیں مثلاً ۲۴ اور ۷۷ بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہیں۔

۴۰۸- ہم ذیل کے چند ابتدائی مسائل کو کثرت سے استعمال میں لائینگے۔ ان میں سے بعض تو عدد مفرد کی تعریف ہی سے اسقدر واضح ہیں کہ ان کو علومِ متعارفہ تصور کیا جاسکتا ہے۔

(۱) اگر عدد ا ایک حاصل ضرب ب ج کو پورا تقسیم کرے اور حاصل ضرب کے ایک جزوِ ضربی ب کے لحاظ سے مفرد ہو تو یہ دوسرے جزوِ ضربی ج کو پورا تقسیم کرے گا۔

چونکہ ا، (ب ج) کو پورا تقسیم کرتا ہے اس لئے ا کا ہر جزو ضربی ب ج میں شامل ہے، نیز چونکہ ا، بلحاظ ب کے

مفرد ہے اس لئے د کا کوئی جزو ضربی ب میں شامل نہیں ہے پس ا کے تمام اجزائے ضربی ج میں موجود ہیں یعنی ا، ج کو پورا تقسیم کرتا ہے۔

(۲) اگر ایک عدد مفرد ا حاصل ضرب ب ج د ..... کو پورا تقسیم کرے تو یہ حاصل ضرب مذکور کے ایک جزو ضربی کو پورا تقسیم کرے گا، بنابریں اگر ایک عدد مفرد ا، $ب^{ن}$ کو پورا تقسیم کرے جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے تو یہ ب کو پورا تقسیم کریگا۔

(۳) اگر ا بلحاظ ب اور ج دونوں کے مفرد ہو تو یہ حاصل ضرب ب ج کے لحاظ سے بھی مفرد ہوگا، ظاہر ہے کہ ا کا کوئی جزوِ ضربی ب کو یا ج کو پورا تقسیم نہیں کرسکتا اس لئے حاصل ضرب ب ج، ا کے کسی جزوِ ضربی پر تقسیم نہیں ہوسکتا یعنی ا بلحاظ ب ج کے مفرد ہے، برعکس اس کے اگر ا بلحاظ ب ج کے مفرد ہو تو یہ بلحاظ ب اور ج دونوں کے مفرد ہوگا۔

نیز اگر ا بلحاظ ب، ج، د.... میں سے ہر ایک کے مفرد ہو تو یہ بلحاظ حاصل ضرب ب ج د..... کے مفرد ہوگا اور برعکس اس کے اگر ا کسی عدد کے لحاظ سے مفرد ہو تو یہ اس عدد کے ہر جزوِ ضربی کے لحاظ سے مفرد ہوگا۔

(۴) اگر ا اور ب بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں تو ا کی ہر مثبت صحیح قوت اور ب کی ہر مثبت صحیح قوت بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہونگی، یہ امر از روئے (۳) فوراً واضح ہوجاتا ہے۔

(۵) اگر ا بلحاظ ب کے مفرد ہو تو کسور $\frac{ا}{ب}$ اور $\frac{ا^{ت}}{ب^{م}}$ ادنیٰ ترین رقوم میں ہونگی یعنی ان کا مزید اختصار نہیں ہو سکیگا، نیز اگر $\frac{ا}{ب}$ اور $\frac{ج}{د}$ کوئی دو مساوی کسریں ہوں اور

$\frac{ا}{ب}$ ادنیٰ ترین رقوم میں ہو تو ج اور د بالترتیب ا اور ب کے مساوی الضعف ہونگے۔

۴۰۹۔ مفرد عددوں کی تعداد لامتناہی ہے۔

اگر ایسا نہیں ہے تو فرض کرو کہ سب سے بڑا مفرد عدد ف ہے، تب حاصل ضرب ۲ × ۳ × ۵ × ۷ × ۱۱ × .... ف جسکا ہر جزوِ ضربی عدد مفرد ہے اجزائے ضربی ۲، ۳، ۵، .... ف میں سے ہر ایک پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے، اس لئے حاصل ضرب مذکور میں ایک جمع کردینے سے جو عدد حاصل ہوگا وہ اجزائے ضربی ۲، ۳، ۵، .... ف میں سے کسی پر بھی پورا تقسیم نہیں ہو سکیگا لہٰذا یا تو یہ حاصل ضرب خود مفرد ہے یا ف سے کسی بڑے عدد مفرد پر تقسیم ہوتا ہے ظاہر ہے کہ دونوں صورتوں میں ف سب سے بڑا مفرد عدد نہیں ہو سکتا پس اعدادِ مفرد کی تعداد غیر محدود ہے۔

۴۱۰۔ کوئی ناطق جبریہ ضابطہ ایسا نہیں ہے جو محض مفرد عددوں کو تعبیر کرے۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ضابطہ

$$ا + ب\,لا + ج\,لا^{۲} + د\,لا^{۳} + \ldots\ldots$$

محض مفرد اعداد کو تعبیر کرتا ہے۔

اگر لا = م تو فرض کرو کہ اس جملہ کی قیمت ف کے مساوی ہے، یعنی

$$ف = ا + ب\,م + ج\,م^{۲} + د\,م^{۳} + \ldots\ldots$$

جب، لا = م + ن ف، تو جملہ مذکور ہوجاتا ہے

ا + ب (م + ن ف) + ج (م + ن ف)^{۲} + د (م + ن ف)^{۳} + ...

یعنی = ا + ب م + ج م^{۲} + د م^{۳} + ... + ف کا کوئی ضعف

یعنی = ف + ف کا کوئی ضعف

پس جملہ مذکورہ ف پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے اور اسلئے عدد مفرد نہیں ہے۔

۴۱۱۔ کوئی عدد اپنے مفرد اجزائے ضربی میں صرف ایک طریقہ سے تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

عدد مذکور کو ع سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ع = ا × ب × ج × د ...... جہاں ا، ب، ج، د ...... اعداد مفرد ہیں،

نیز فرض کرو کہ ع = عہ × بہ × جہ × لہ × ....

جہاں عہ، بہ، جہ، لہ، ...... کوئی اور اعداد مفرد ہیں۔

تب ا × ب × ج × د × .... = عہ × بہ × جہ × لہ × ....

اس لئے عہ حاصل ضرب ا ب ج د ...... کو پورا تقسیم کرتا ہے لیکن چونکہ اس حاصل ضرب کا ہر جزوِ ضربی مفرد ہے، اس لئے عہ ان اجزائے ضربی میں سے صرف ایک کو (فرض کرو کہ ا کو) پورا تقسیم کرتا ہے لیکن عہ اور ا دونوں مفرد ہیں اس لئے عہ لازماً ا کے مساوی ہوگا۔

پس ب ج د = بہ ج لہ، اور حسب سابق بہ، حاصل ضرب ب ج د ...... کے اجزائے ضربی میں سے ایک جزو ضربی (فرض کرو) ب کے مساوی ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس، لہٰذا عہ بہ جہ لہ کے اجزائے ضربی ا ب ج د ..... کے اجزائے ضربی کے مساوی ہیں۔ پس ع کے مفرد اجزائے ضربی کا صرف ایک ہی سیٹ ہے۔

۴۱۲۔ کسی عددِ مرکب کے جو مختلف مقسوم علیہ ہو سکتے

ہیں۔ اُن کی تعداد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ عدد زیر بحث ع ہے اور $ع = ا^{ف} ب^{ق} ج^{ر} \ldots$

جہاں ا، ب، ج، .... مختلف اعدادِ مفرد ہیں اور ف، ق، ر، .... مثبت صحیح اعداد ہیں، تب ظاہر ہے کہ حاصل ضرب

$$(۱ + ا + ا^{۲} + \ldots + ا^{ف})(۱ + ب + ب^{۲} + \ldots + ب^{ق})(۱ + ج + ج^{۲} + \ldots + ج^{ر}) \ldots\ldots$$

کی ہر ایک رقم عدد مذکور کو تقسیم کرتی ہے اِن کے علاوہ اور کوئی عدد مقسوم علیہ نہیں ہے، پس مقسوم علیہوں کی تعداد حاصل ضرب مذکورہ کی کل رقموں کی تعداد کے مساوی ہے یعنی

$$(ف + ۱)(ق + ۱)(ر + ۱) \ldots\ldots$$

ہے، اس تعداد میں خود عدد اور مقسوم علیہ ایک بھی شامل ہیں۔

۴۱۳ - کوئی عدد مرکب جن مختلف طریقوں سے دو اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے۔ اُن کی تعداد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ عدد ع ہے اور $ع = ا^{ف} ب^{ق} ج^{ر} \ldots$ جہاں ا، ب، ج، .... مختلف اعداد مفرد ہیں اور ف، ق، ر مثبت صحیح عدد ہیں۔

تب حاصل ضرب

$$(۱ + ا + ا^{۲} + \ldots + ا^{ف})(۱ + ب + ب^{۲} + \ldots + ب^{ق})(۱ + ج + ج^{۲} + \ldots + ج^{ر})$$

....

کی ہر ایک رقم ع کا ایک مقسوم علیہ ہے، لیکن ع کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کے ہر ایک طریقہ کے جواب میں دو مقسوم علیہ ہیں۔ لہذا

تعداد مطلوبہ $\frac{1}{2}$ (ف + ۱) (ق + ۱) (ل + ۱) ..... ہے۔

اس میں یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ ع پورا مربع نہیں ہے گویا اعداد ف، ق، ل ..... میں سے کم از کم ایک عدد طاق ہے۔ اگر ع پورا مربع ہو تو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کا ایک طریقہ $\sqrt{ع} \times \sqrt{ع}$ ہے اور اس طریقہ کے جواب میں صرف ایک مقسوم علیہ $\sqrt{ع}$ ہے اگر ہم اس کو نکال دیں تو تحلیل کے طریقوں کی تعداد

$$\frac{1}{2}\{(ف + ۱)(ق + ۱)(ل + ۱)\ ......\ - ۱\}$$

رہ جاتی ہے، اس میں ہمیں $\sqrt{ع} \times \sqrt{ع}$ کا ایک طریقہ جمع کرنا چاہئیے اسی طرح سے ہمیں مطلوبہ تعداد

$$\frac{1}{2}\{(ف + ۱)(ق + ۱)(ل + ۱)\ ......\ + ۱\}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۴۴۱۔ ایک عدد مرکب کتنے طریقوں سے دو ایسے اجزائے ضربی میں تحلیل ہوسکتا ہے جو بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں۔

حسب سابق فرض کرو کہ عدد ع = $ا^{ف}\ ب^{ق}\ ج^{ل}$ .....

مذکورہ دو اجزائے ضربی میں سے ایک میں لازماً $ا^ف$ واقع ہوگا کیونکہ اگر ایسا نہ ہوتو ا کی کوئی قوت ایک جزو ضربی میں شامل ہوگی اور کوئی اور قوت دوسرے میں اور اس طرح سے یہ دو اجزائے ضربی بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد نہیں ہونگے۔

اسی طرح $ب^ق$ بھی صرف ایک جزو ضربی میں شامل ہوگا اور علیٰ ہذالقیاس

پس مطلوبہ تعداد اُن طریقوں کی تعداد کے مساوی ہے جنمیں حاصل ضرب ا × ب × ج × د ...... کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے، یعنی طریقوں کی تعداد

$\frac{1}{2}(1+1)(1+1)(1+1)......$ یعنی $2^{ن-1}$ کے مساوی ہے

جہاں ن، ع کے مختلف مفرد اجزائے ضربی کی تعداد کے مساوی ہے۔

۴۱۵۔ ایک عدد کے مقسوم علیہوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ عددِ مذکور حسب سابق $ا^ف ب^ق ج^ر ......$ ہے

تب حاصل ضرب

$(1+ا+ا^2+......+ا^ف)(1+ب+ب^2+......+ب^ق)(1+ج+ج^2+......+ج^ر)$

کی ہر ایک رقم ایک مقسوم علیہ ہے، اس لئے مقسوم علیہوں کا حاصل جمع اِس حاصل ضرب کے مساوی ہے، یعنی حاصل جمع مطلوبہ

$$= \frac{ا^{ف+1}-1}{ا-1} \times \frac{ب^{ق+1}-1}{ب-1} \times \frac{ج^{ر+1}-1}{ج-1}$$

مثال ۱۔ عدد ۲۱۶۰۰ پر غور کرو۔

چونکہ $21600 = 6^3 \times 10^2 = 2^3 \times 3^3 \times 2^2 \times 5^2 = 2^5 \times 3^3 \times 5^2$

مقسوم علیہوں کی تعداد $= (5+1)(3+1)(2+1) = 72$

مقسوم علیہوں کا حاصل جمع $= \frac{2^6-1}{2-1} \times \frac{3^4-1}{3-1} \times \frac{5^3-1}{5-1}$

$= 63 \times 40 \times 31 = 78120$

نیز ۲۱۶۰۰ دو ایسے اجزائے ضربی میں جو بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں 2^{3-1} یعنی ۴ طریقوں سے تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

مثال ۲۔ اگر ن طاق ہو تو ثابت کرو کہ ن (ن^2 - ۱)، ۲۴ پر تقسیم ہوسکتا ہے۔ ظاہر ہے کہ ن (ن^2 - ۱) = ن (ن - ۱) (ن + ۱)

چونکہ ن طاق ہے اس لئے (ن - ۱) اور (ن + ۱) دو متصل جفت عدد ہیں، اس لئے اُن میں سے ایک عدد ۲ پر اور دوسرا ۴ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

نیز (ن - ۱)، ن، (ن + ۱) تین متصل عدد ہیں، اس لئے اُن میں سے ایک ۳ پر تقسیم ہوسکتا ہے، لہٰذا جملۂ بالا ۲، ۳ اور ۴ کے حاصل ضرب یعنی ۲۴ پر پورا تقسیم ہوجاتا ہے۔

مثال ۳۔ ۳ کی بڑی سے بڑی قوت معلوم کرو جو $|\underline{100}$ میں شامل ہے۔ پہلے ۱۰۰ عددوں میں سے اتنے عدد ۳ پر تقسیم ہوسکتے ہیں جتنی بار کہ ۳، ۱۰۰ میں آسکتا ہے، یعنی ۳۳ عدد ۳ پر تقسیم ہوسکتے ہیں۔ یہ اعداد ۳، ۶، ۹، ۱۲ .... ۹۹ ہیں، اِن عددوں میں سے بعض میں جزو ضربی ۳ دو دفعہ آتا ہے مثلاً ۹، ۱۸، ۲۷، ... ہیں؛ ایسے عددوں کی تعداد اُس خارج قسمت کے مساوی ہے جو ۱۰۰ کو ۹ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے، بعض ایسے ہیں جن میں جزو ضربی ۳ تین بار شامل ہے مثلاً ۲۷، ۵۴، ۸۱،

اِن کی تعداد ۱۰۰ ÷ ۲۷ کے خارج قسمت کے برابر ہے وہ عدد جس میں جزو ضربی ۳ چار بار آتا ہے وہ صرف ایک عدد ۸۱ ہے،
پس مطلوبہ بڑی سے بڑی قوت = ۳۳ + ۱۱ + ۳ + ۱ = ۴۸
یہ مشق دفعہ مابعد کے مسئلہ کی ایک خاص صورت ہے۔

۴۱۶ - مفرد عدد ا کی بڑی سے بڑی قوت جو لنؔ میں شامل ہے اسے معلوم کرو۔

فرض کرو کہ بڑے سے بڑے صحیح عدد جو $\frac{ن}{ا}$، $\frac{ن}{ا^2}$، $\frac{ن}{ا^3}$، ... میں شامل ہیں بالترتیب ص $\left(\frac{ن}{ا}\right)$، ص $\left(\frac{ن}{ا^2}\right)$، ص $\left(\frac{ن}{ا^3}\right)$، ... سے تعبیر ہوتے ہیں، تب اعداد ۱، ۲، ۳، ..... ن میں ص $\left(\frac{ن}{ا}\right)$ عدد ایسے ہیں جن میں ا کم از کم ایک بار شامل ہوتا ہے، یہ اعداد ا، ۲ا، ۳ا، ..... ہیں، اسی طرح سے ص $\left(\frac{ن}{ا^2}\right)$ عدد ایسے ہیں جن میں $ا^2$ کم از کم ایک بار شامل ہوتا ہے، اور ص $\left(\frac{ن}{ا^3}\right)$ ایسے ہیں جن میں $ا^3$ کم از کم ایک بار آتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس، پس ا کی بڑی سے بڑی قوت جو لنؔ میں شامل ہے یہ ہے

$$ص\left(\frac{ن}{ا}\right) + ص\left(\frac{ن}{ا^2}\right) + ص\left(\frac{ن}{ا^3}\right) + \cdots\cdots$$

۴۱۷ - اس باب کے باقی حصہ میں سہولت کی خاطر ن کے کسی ضعف کو ضعف (ن) سے تعبیر کیا جائے گا۔

۴۱۸ - ثابت کرو کہ متصل ر صحیح اعداد کا حاصل ضرب لرؔ پر

پورا تقسیم ہوتا ہے

فرض کرو کہ ر متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب $ض_{ن}$ ہے
جہاں ن اِن اعداد میں سب سے چھوٹا ہے

تب $ض_{ن} = ن\,(ن+۱)\,(ن+۲)\ldots(ن+ر-۱)$

اور $ض_{ن+۱} = (ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)\ldots\ldots(ن+ر)$

$$\therefore\ ن\,ض_{ن+۱} = (ن+ر)\,ض_{ن} = ن\,ض_{ن} + ر\,ض_{ن}$$

$$\therefore\ ض_{ن+۱} - ض_{ن} = \frac{ض_{ن}}{ن} \times ر$$

= (ر-۱) متصل صحیح اعداد کے حاصل ضرب کا ر گنا۔

پس اگر (ر-۱) متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب |ر-۱ پر تقسیم ہو جائے تو

$$ض_{ن+۱} - ض_{ن} = ر\ \text{ضعف}\ (|ر-۱)$$

$$= \text{ضعف}\ (|ر)$$

اب $ض_{۱} = |ر$، اس لئے $ض_{۲}$، |ر کا ضعف ہے، بنابریں $ض_{۳}$، $ض_{۴}$، ..... بھی |ر کے ضعف ہیں۔ اِس طرح ہم نے یہ ثابت کر دیا ہے کہ اگر ر-۱ متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب |ر-۱ پر پورا تقسیم ہو جائے تو متصل ر صحیح اعداد کا حاصل ضرب |ر پر پورا تقسیم ہو جائیگا۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ ہر دو متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب |۲ پر تقسیم ہو جاتا ہے، اس لئے ہر تین متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب |۳ پر تقسیم ہو سکتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس

اِس مسئلہ کو اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

دفعہ ۴۱۶ کے مطابق ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ہر ایک مفرد

جزوِ ضربی $\underline{|ن+ر}$ میں کم از کم اتنی بار شامل ہوتا ہے جتنی بار کہ یہ $\underline{|ن}$ $\underline{|ر}$ میں شامل ہوتا ہے اسے ہم طالب علم کے لئے بطور مشق کے چھوڑتے ہیں۔

۴۱۹۔ اگر ف کوئی مفردِ صحیح عدد ہو تو $(ا + ب)^{ف}$ کی تفصیل میں پہلی اور آخری رقم کے سوائے باقی سب رقوم کے سر ف پر تقسیم ہو سکتے ہیں۔

پہلی اور آخری رقم کے سوائے ہر ایک رقم کا سر

$$\frac{ف(ف-۱)(ف-۲)\ldots(ف-ر+۱)}{\underline{|ر}}$$

کی شکل کا ہے جہاں ر کوئی ایسا صحیح عدد ہو سکتا ہے جو ف - ۱ سے بڑا نہ ہو۔ اب یہ جملہ ایک صحیح عدد ہے نیز چونکہ ف عددِ مفرد ہے اس لئے $\underline{|ر}$ کا کوئی جزوِ ضربی اسکا مقسوم علیہ نہیں ہو سکتا۔ اور چونکہ ف بڑا ہے ر سے اسلئے یہ $\underline{|ر}$ کے کسی جزوِ ضربی کو تقسیم نہیں کر سکتا یعنی $(ف-۱)(ف-۲)(ف-۳)\ldots\ldots(ف-ر+۱)$ لازماً $\underline{|ر}$ پر تقسیم ہو سکتا ہے، لہٰذا ابتدائی اور آخری رقم کے سوائے ہر رقم کا سر ف پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

۴۲۰۔ اگر ف کوئی عددِ مفرد ہو تو ثابت کرو کہ

$$(ا+ب+ج+د+\ldots)^{ف} = ا^{ف} + ب^{ف} + ج^{ف} + د^{ف} + \ldots + ضعفِ\,(ف)$$

ب + ج + د + ... کی بجائے بہ رکھو

تب حسب دفعہ ماقبل $(ا + بہ)^{ف} = ا^{ف} + بہ^{ف} + ضعفِ\,(ف)$

نیز $بہ^{ف} = (ب + ج + د + \ldots)^{ف} =$ فرض کرو $(ب + جہ)^{ف}$

$= ب^{ف} + جہ^{ف} + ضعفِ\,(ف)$

اسی طرح مسلسل عمل کرنے سے ہم مطلوبہ نتیجہ پر پہنچ جاتے ہیں۔

۲۱۴ - (فرما کا مسئلہ)۔ اگر ف کوئی عدد مفرد ہو اور عدد ع مفرد ہو بلحاظ ف کے، تو $ع^{ف-۱} - ۱ =$ ف کا کوئی ضعف ہوگا

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

$$(ا + ب + ج + د + ...)^{ف} = ا^{ف} + ب^{ف} + ج^{ف} + د^{ف} + ... + ضعف(ف)$$

فرض کرو کہ مقادیر ا، ب، ج، د.... وغیرہ میں سے ہر ایک مقدار ا کے مساوی ہے اور ان کی تعداد ع ہے، تب

$$ع^{ف} = ع + ضعف(ف)$$

$$یعنی \quad ع(ع^{ف-۱} - ۱) = ضعف(ف)$$

لیکن ع بلحاظ ف کے مفرد ہے اسلئے $ع^{ف-۱} - ۱$، ف کا ضعف ہے۔

نتیجہ صریح - چونکہ ف مفرد ہے اسلئے ف - ۱ کوئی جفت عدد ہوگا سوائے اس صورت کے جبکہ ف = ۲

$$اس لئے \quad (ع^{\frac{ف-۱}{۲}} + ۱)(ع^{\frac{ف-۱}{۲}} - ۱) = ضعف(ف)$$

لہذا $ع^{\frac{ف-۱}{۲}} + ۱$ یا $ع^{\frac{ف-۱}{۲}} - ۱$ ضعف ہے ف کا

یعنی $ع^{\frac{ف-۱}{۲}} = ک ف \pm ۱$ جہاں ک کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۴۲ - یاد رہے کہ دفعہ ۲۴۱ میں یہ بتایا جا چکا ہے کہ
ع^{ف} - ع = ضعف (ف) خواہ ع بلحاظ ف کے مفرد ہو
یا نہ ہو۔ یہ نتیجہ اکثر اوقات فرما کے مسئلہ کی نسبت زیادہ
مفید ثابت ہوتا ہے۔

مثال ۱ - ثابت کرو کہ ن^{۷} - ن، ۴۲ پر تقسیم ہو سکتا ہے۔
چونکہ ۷ عددِ مفرد ہے اس لئے ن^{۷} - ن = ضعف (۷)
نیز ن^{۷} - ن = ن (ن^{۶} - ۱) = ن (ن + ۱) (ن - ۱) (ن^{۴} + ن^{۲} + ۱)
اب (ن - ۱) ن (ن + ۱)، ۳! پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے، اسلئے
ن^{۷} - ن، پورا تقسیم ہو سکتا ہے ۶ × ۷ یعنی ۴۲ پر۔

مثال ۲ - اگر ف عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ کسی دو اعداد
کی ف ویں قوتوں کا فرق اُن اعداد کے فرق سے بقدر ف
کے کسی ضعف کے زیادہ ہوگا۔
فرض کرو کہ لا اور ما دو عدد ہیں، تب

لا^{ف} - لا = ضعف (ف) اور ما^{ف} - ما = ضعف (ف)

یعنی لا^{ف} - ما^{ف} - (لا - ما) = ضعف (ف) اور یہی ثابت کرنا تھا

مثال ۳ - ثابت کرو کہ ہر مربع عدد ۵ ن یا ۵ ن ± ۱ کی
شکل کا ہوتا ہے۔
اگر ع بلحاظ ۵ کے مفرد نہ ہو تو ع^{۲} = ۵ ن جہاں ن کوئی مثبت
صحیح عدد ہے اگر ع بلحاظ ۵ کے مفرد ہو تو
ع^{۴} - ۱ فرما کے مسئلہ کی رو سے ۵ کا ضعف ہے،
پس یا ع^{۲} - ۱ یا ع^{۲} + ۱، ۵ کا ضعف ہوگا یعنی ع^{۲} = ۵ ن ± ۱

امثلہ نمبری ۳۰ (ا)

۱ - بتاؤ کہ اِن اعداد

۳۶۷۵، ۴۳۷۴، ۱۸۳۷۵، ۷۴۰۸۸

کو جداگانہ کن چھوٹے سے چھوٹے اعداد کے ساتھ ضرب دیا جائے کہ حاصل ضرب پورے مربعے بن جائیں۔

۲۔ بتاؤ کہ ان اعداد

۶۲۲۳، ۱۰۹۳۵۰، ۵۳۹۵۳۹

کو جداگانہ کن چھوٹے سے چھوٹے اعداد کے ساتھ ضرب دیا جائے کہ حاصل ضرب پورے مکعب بن جائیں۔

۳۔ اگر لا اور ما مثبت صحیح عدد ہوں اور لا - ما جفت ہو تو ثابت کرو کہ لا^{۲} - ما^{۲}، ۴ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ کسی عدد اور اسکے مربع کا فرق جفت ہوتا ہے۔

۵۔ اگر ۴ لا - ما، ۳ کا ضعف ہو تو ثابت کرو کہ ۴ لا^{۲} + ۷ لا ما - ۲ ما^{۲}، ۹ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

۶۔ ۸۰۶۴ کے مقسوم علیہوں کی تعداد معلوم کرو۔

۷۔ عدد ۷۰۵۶ کتنے مختلف طریقوں سے دو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ ۲^{۴ن} - ۱، ۱۵ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ ن (ن + ۱) (ن + ۵)، ۶ کا ضعف ہے

۱۰۔ ثابت کرو کہ اگر کسی عدد اور اس عدد کے مکعب دونوں کو ۶ پر تقسیم کیا جائے تو دونوں صورتوں میں وہی باقی حاصل ہوتی ہے۔

۱۱۔ اگر ن جفت ہو تو ثابت کرو کہ ن (ن^{۲} + ۲۰)، ۴۸ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ ن (ن^{۲} - ۱) (۳ ن + ۲)، ۲۴ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے۔

۱۳- اگر ن، ۲ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ $ن^{۵} - ۵ن^{۳} + ۴ن$، ۱۲۰ پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

۱۴- ثابت کرو $۳^{۲ن} + ۷$، ۸ کا ضعف ہے۔

۱۵- اگر ن کوئی عددِ مفرد ہو جو ۳ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ $ن^{۲} - ۱$، ۲۴ کا کوئی ضعف ہے۔

۱۶- ثابت کرو کہ، ن کی تمام قیمتوں کے لئے $ن^{۵} - ن$، ۳۰ پر تقسیم ہو سکتا ہے اور اگر ن طاق ہو تو ۲۴۰ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

۱۷- ثابت کرو کہ اگر دو عددِ مفرد ۶ سے بڑے ہوں تو اُن کے مربعوں کا فرق ۲۴ پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

۱۸- ثابت کرو کہ کوئی مربع عدد ۳ ن - ۱ کی شکل کا نہیں ہو سکتا۔

۱۹- ثابت کرو کہ ہر مکعب عدد ۹ ن یا ۹ ن ± ۱ کی شکل کا ہوتا ہے۔

۲۰- ثابت کرو کہ اگر کسی مکعب عدد کو ۷ پر تقسیم کیا جائے تو باقی ۰، ۱ یا ۶ بچیگی۔

۲۱- اگر ایک عدد مربع بھی ہو اور مکعب بھی تو ثابت کرو کہ یہ ۷ ن یا ۷ ن + ۱ کی شکل کا ہوگا۔

۲۲- ثابت کرو کہ کوئی مثلث عدد ۳ ن - ۱ کی شکل کا نہیں ہو سکتا۔

۲۳- اگر ۲ ن + ۱ کوئی عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ $۱^{۲}$، $۲^{۲}$، $۳^{۲}$ ... $ن^{۲}$ کو ۲ ن + ۱ پر تقسیم کرنے سے مختلف باقیاں بچتی ہیں۔

۲۴- ثابت کرو کہ $ا^{لا} + ا$ اور $ا^{لا} - ا$ ہمیشہ جفت ہوتے ہیں خواہ ا اور لا کی کچھ ہی قیمتیں ہوں۔

۲۵- ثابت کرو کہ ہر طاق عدد کی جفت قوت ۸ ل + ۱ کی شکل کی ہوتی ہے۔

۲۶- ثابت کرو کہ کسی عدد کی ۱۲ ویں قوت ۱۳ ن، ۱۳ ن + ۱ کی شکل کی ہوتی ہے۔

۲۷- ثابت کرو کہ کسی عدد کی ۸ ویں قوت ۱۷ ن یا ۱۷ ن ± ۱ کی شکل کی ہوتی ہے۔

۲۸- اگر ن کوئی عدد مفرد ہو جو ۵ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ $ن^{۴} - ۱$، ۲۴۰ پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

۲۹- اگر ن کوئی مفرد عدد ہو جو ۳ سے بڑا ہو بشرطیکہ ۷ نہ ہو تو ثابت کرو کہ $ن^{۶} - ۱$، ۱۶۸ پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

۳۰- اگر ن بلحاظ ۲، ۳، ۱۹ اور ۳۷ کے مفرد ہو تو ثابت کرو کہ $ن^{۳۶} - ۱$، ۳۳۷۴۴ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

۳۱- اگر (ف + ۱) اور ۲ ف + ۱ دونوں مفرد عدد ہوں تو ثابت کرو کہ $لا^{۲ف} - ۱$ پورا تقسیم ہو سکتا ہے ۸ (ف + ۱) (۲ ف + ۱) پر بشرطیکہ لا بلحاظ ۲، ف + ۱، ۲ ف + ۱ کے مفرد ہو۔

۳۲- اگر ف عددِ مفرد ہو اور لا بلحاظ ف کے مفرد ہو تو ثابت کرو کہ $لا^{ف^{ر} - ف^{ر-۱}} - ۱$ پورا تقسیم ہو جاتا ہے $ف^{ر}$ پر

۳۳- اگر م ایک عددِ مفرد ہو اور ا اور ب دو اور عدد ہوں جو م سے کم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ا^{م-۲} + ا^{م-۳} ب + ا^{م-۴} ب^{۲} + \ldots\ldots + ب^{م-۲}$$

م کا ضعف ہوگا۔

۳۴- اگر ا کوئی عدد ہو تو کوئی اور عدد ع اس شکل ع = ا ق + ب میں لکھا جا سکتا ہے جہاں ق اور ب

بالترتیب خارج قسمت اور باقی ہیں جو ع کو ا پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ عدد ا کو جس کے ساتھ کوئی اور عدد اس طرح منسوب کیا جاتا ہے مقیاس کہتے ہیں۔ بلحاظ کسی خاص مقیاس کے عدد ع کی ا مختلف شکلیں ہیں جن میں سے ہر ایک شکل باقی ب کی مختلف قیمتوں سے جواب میں پیدا ہوتی ہے مثلاً مقیاس ۳ کے جواب میں ۳ ق، ۳ ق + ۱، ۳ ق + ۲ کی شکل کے عدد ہیں۔ ان کو اختصاراً ۳ ق، ۳ ق ± ۱ لکھ سکتے ہیں کیونکہ
۳ ق + ۲ = ۳ (ق + ۱) = ۱، اسی طرح سے مقیاس ۵ کے جواب میں عدد ع ذیل کی پانچ شکلوں ۵ ق، ۵ ق ± ۱، ۵ ق ± ۲ میں سے کسی ایک شکل کا ہوگا۔

۴۲۴ – اگر ب اور ج دو ایسے صحیح عدد ہوں کہ اگر ان کو ا پر تقسیم کیا جائے تو وہی باقی بچے تو ان عددوں کو بلحاظ مقیاس ا کے مستطابق کہتے ہیں۔ اس صورت میں ب - ج ا کا ضعف ہوگا۔ گاس کی ترقیم کے موافق ہم اس کو بعض اوقات یوں تحریر کرینگے۔

ب ≡ ج (مق ا) یا ب - ج ≡ ۰ (مق ا)

ان ضابطوں میں سے ہر ایک ضابطہ استطابق کہلاتا ہے۔

۴۲۵ – اگر بلحاظ مقیاس ا کے ب اور ج مستطابق ہوں تو ف ب اور ف ج مستطابق ہونگے جہاں ف کوئی صحیح عدد ہے۔

حسب مفروض ب - ج = ن ا جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے اسلئے ف ب - ف ج = ف ن ا، پس مسئلہ ثابت ہوا

۴۲۶ – اگر ا بلحاظ ب کے مفرد ہو تو مقادیر
ا، ۲ ا، ۳ ا، ...... (ب - ۱) ا

کو ب پر تقسیم کرنے سے جو باقیاں حاصل ہوں گی وہ سب مختلف ہوں گی۔
اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ جب دو مقادیر م ا اور مَ ا کو ب پر تقسیم کیا جائے تو ایک ہی باقی ر حاصل ہوتی ہے،
تب م ا = ق ب + ر اور مَ ا = قَ ب + ر
یعنی (م - مَ) ا = (ق - قَ) ب
اس لئے ب، (م - مَ) ا کو پورا تقسیم کرتا ہے اور چونکہ ب بلحاظ ا کے مفرد ہے اس لئے ب، (م - مَ) کو تقسیم کرتا ہے، لیکن یہ ناممکن ہے کیونکہ م اور مَ دونوں ب سے کم ہیں۔
پس باقیاں سب مختلف ہیں اور چونکہ اِن مقداروں میں سے کوئی مقدار ب پر تقسیم نہیں ہو سکتی اس لئے باقیاں سلسلہ ۱، ۲، ۳، ..... ب - ۱ کی رقمیں ہونگی لیکن ضروری نہیں کہ باقیاں اسی ترتیب میں ہوں۔

نتیجۂ صریح ۔ اگر ا بلحاظ ب کے مفرد ہو اور ج کوئی عدد ہو تو ذیل کے سلسلۂ حسابیہ
ج، (ج + ا)، (ج + ۲ ا)، (ج + ۳ ا)، ..... ج + (ب - ۱) ا
کی ب رقموں کو ب پر تقسیم کرنے سے وہی باقیاں نکلتی ہیں جو سلسلہ

ج، ج + ۱، ج + ۲، .... ج + (ب - ۱)

سے نکلتی ہیں اگرچہ ضروری نہیں کہ اسی ترتیب میں ہوں۔
پس باقیاں ۰، ۱، ۲، ..... ب - ۱ ہوں گی۔

۲۷۴ ۔ اگر ب، ب۱، ب۲، ..... بلحاظ مقیاس ا کے مقادیر

ج$_1$، ج$_2$، ج$_3$، ...... کے مستطابق ہوں تو حاصل ضرب ب$_1$ ب$_2$ ب$_3$ ..... اور ج$_1$ ج$_2$ ج$_3$ ..... بھی مستطابق ہونگے۔

حسب مفروض

ب$_1$ - ج$_1$ = ن$_1$ ا، ب$_2$ - ج$_2$ = ن$_2$ ا، ب$_3$ - ج$_3$ = ن$_3$ ا، ......

جہاں ن$_1$، ن$_2$، ن$_3$، ...... صحیح عدد ہیں۔

$\therefore$ ب$_1$ ب$_2$ ب$_3$ ..... = (ج$_1$ + ن$_1$ ا) (ج$_2$ + ن$_2$ ا) (ج$_3$ + ن$_3$ ا) ....

= ج$_1$ ج$_2$ ج$_3$ .... + ضعف (ا)

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۸۴۔ اب ہم فرما کے مسئلہ کا متبادل ثبوت درج کرتے ہیں

اگر ف ایک مفرد عدد ہو اور ع بلحاظ ف کے مفرد ہو تو ع$^{\text{ف}-1}$ - ۱، ف کا ضعف ہوگا۔

چونکہ ع اور ف بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہیں، اسلئے جب اعداد

ع، ۲ع، ۳ع، ..... (ف-۱) ع ...... (۱)

کو ف پر تقسیم کیا جائے تو باقیاں بالترتیب

۱، ۲، ۳، ..... (ف-۱) نکلتی ہیں اگرچہ یہ ضروری نہیں کہ اسی ترتیب میں ہوں۔ اسلئے (۱) کی تمام رقموں کا حاصل ضرب باقیوں کی تمام رقوم کے حاصل ضرب کے مستطابق ہے جبکہ ف مقیاس ہو

یعنی |ف-۱ ع$^{\text{ف}-1}$ اور |ف-۱ کو ف پر تقسیم کرنے سے

ایک ہی باقی نکلتی ہے، لہٰذا

|ف-۱ (ع^(ف-۱) -۱) = ضعف (ف)

لیکن |ف-۱ بلحاظ ف کے مفرد ہے، اس لئے

ع^(ف-۱) -۱ = ضعف (ف)

۴۲۹ - ہم اُن صحیح اعداد کی تعداد کو جو کسی عدد ا سے کم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں فہ (ا) سے تعبیر کرینگے، مثلاً فہ (۲) = ۱ فہ (۱۳) = ۱۲، فہ (۱۸) = ۶ کیونکہ وہ اعداد جو ۱۸ سے کم ہیں اور بلحاظ ۱۸ کے مفرد ہیں ذیل کے چھ اعداد ۱، ۵، ۷، ۱۱، ۱۷، ہیں، یہ امر قابل غور ہے کہ ہم یہاں ۱ کو سب اعداد کے لحاظ سے مفرد خیال کرتے ہیں

۴۳۰ - ثابت کرو کہ اگر اعداد ا، ب، ج، د ...... بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں تو فہ (ا ب ج د ......)

= فہ (ا) × فہ (ب) × فہ (ج) × فہ (د) ......

حاصل ضرب ا ب پر غور کرو، تب پہلے ا ب عدد، ب سطروں میں اس طرح لکھے جا سکتے ہیں

۱، ۲، ...... ک، ...... ا

ا+۱، ا+۲، ...... ا+ک، ...... ا+ا

۲ا+۱، ۲ا+۲، ...... ۲ا+ک، ...... ۲ا+ا

....

(ب-۱)ا+۱، (ب-۱)ا+۲، ...... (ب-۱)ا+ک، ...... (ب-۱)ا+ا

اس انتصابی ستون پر غور کرو جو ک سے شروع ہوتا ہے اگر ک بلحاظ ا کے مفرد ہو تو اس ستون کی سب رقمیں

بلحاظ ا کے مفرد ہونگی، لیکن اگر ک اور ا میں کوئی مشترک جزوِ ضربی ہو تو اس ستون کا کوئی عدد بلحاظ ا کے مفرد نہیں ہوگا۔ اب پہلی قطار میں فہ (ا) عدد ہیں جو بلحاظ ا کے مفرد ہیں۔ پس فہ (ا) انتصابی ستون ایسے ہیں جن کی سب رقمیں بلحاظ ا کے مفرد ہیں۔ فرض کرو کہ وہ ستون جو ک سے شروع ہوتا ہے اسی قسم کا ستون ہے۔ اس ستون کی رقمیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور اگر اس کی رقموں کو ب پر تقسیم کیا جائے تو بالترتیب باقیاں ۰، ۱، ۲، ۳،.......(ب-۱) حاصل ہوتی ہیں (دیکھو نتیجہ صریح دفعہ ۴۲۶)، پس اس ستون میں فہ (ب) عدد بلحاظ ب کے مفرد ہیں۔

اب فہ (ا) ستون ایسے ہیں جنکی ہر رقم بلحاظ ا کے مفرد ہے۔ اور ایسے ہر ستون میں فہ (ب) عدد ہیں جو بلحاظ ب کے مفرد ہیں۔ پس جدول بالا میں کل فہ (ا) × فہ (ب) عدد ایسے ہیں جو بلحاظ ا اور ب دونوں کے مفرد ہیں۔ یعنی بلحاظ اب کے مفرد ہیں۔ لہذا

فہ (اب) = فہ (ا) × فہ (ب)

∴ فہ (اب ج د.....) = فہ (ا) × فہ (ب ج.....)

= فہ (ا) × فہ (ب) × فہ (ج د...)

= فہ (ا) × فہ (ب) × فہ (ج) × فہ (د)

۴۳۱۔ اُن مثبت صحیح اعداد کی تعداد معلوم کرو جو ایک معلومہ عدد سے کم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں

فرض کرو کہ تعدادِ مذکور ع ہے اور ع = $ا^{ل}\ ب^{ق}\ ج^{ق'}$.... جہاں

ا، ب، ج، .... مختلف اعداد مفرد ہیں اور ف، ق، ر مثبت صحیح عدد ہیں۔

جزوِ ضربی $ا^{ف}$ پر غور کرو، طبعی اعداد ۱، ۲، ۳، ... $ا^{ف} - ۱$، $ا^{ف}$ میں وہ اعداد جو بلحاظ ا کے مفرد نہیں ہیں یہ ہیں۔

$$ا،\ ۲ا،\ ۳ا،\ \ldots\ (ا^{ف-۱} - ۱)\,ا،\ (ا^{ف-۱})\,ا$$

اور ان کی تعداد $ا^{ف-۱}$ ہے، اس لئے

$$فہ(ا^{ف}) = ا^{ف} - ا^{ف-۱} = ا^{ف}\left(۱ - \frac{۱}{ا}\right)$$

اب سب اجزائے ضربی $ا^{ف}$، $ب^{ق}$، $ج^{ر}$ .... بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہیں۔

$$\therefore\ فہ(ا^{ف}\,ب^{ق}\,ج^{ر}\ldots) = فہ(ا^{ف}) \times فہ(ب^{ق}) \times فہ(ج^{ر})\ldots$$

$$= ا^{ف}\left(۱ - \frac{۱}{ا}\right) \times ب^{ق}\left(۱ - \frac{۱}{ب}\right) \times ج^{ر}\left(۱ - \frac{۱}{ج}\right)\ldots$$

$$= ا^{ف}\,ب^{ق}\,ج^{ر}\ldots\left(۱ - \frac{۱}{ا}\right)\left(۱ - \frac{۱}{ب}\right)\left(۱ - \frac{۱}{ج}\right)\ldots$$

یعنی $فہ(ع) = ع\left(۱ - \frac{۱}{ا}\right)\left(۱ - \frac{۱}{ب}\right)\left(۱ - \frac{۱}{ج}\right)\ldots$

مثال۔ ثابت کرو کہ اُن سب صحیح اعداد کا حاصل جمع جو ع سے کم ہوں اور بلحاظ اسکے مفرد ہوں $\frac{۱}{۲}\, ع \times فہ(ع)$ ہے

اگر لا کوئی صحیح عدد ہو جو ع سے کم ہو اور بلحاظ اس کے مفرد ہو تو ع - لا بھی ایک صحیح عدد ہوگا جو ع سے کم اور بلحاظ اس کے مفرد ہوگا۔

صحیح عددوں کو ۱، ف، ق، ر، ...... سے اور اِن کے حاصل جمع کو ج سے تعبیر کرو۔ تب

ج = ۱ + ف + ق + ر + ... (ع - ر) + (ع - ق) + (ع - ف) + (ع - ۱)

اِس سلسلہ میں فہ (ن) رقمیں ہیں۔

اِس سلسلہ کو الٹا لکھنے سے

ج = (ع - ۱) + (ع - ف) + (ع - ق) + (ع - ر) + ... + ر + ق + ف + ۱

∴ جمع کرنے سے ۲ ج = ع + ع + ع + ... فہ (ع) رقموں تک

∴ ج = ۱/۲ ع × فہ (ع)

۳۲۴۔ دفعۂ گذشتہ سے ظاہر ہے کہ جو عدد ع سے کم ہیں اور بلحاظ اِس کے مفرد نہیں ہیں اِن کی تعداد

= ع - ع (۱ - ۱/ا) (۱ - ۱/ب) (۱ - ۱/ج) (۱ - ۱/د) ....

یعنی = ع/ا + ع/ب + ع/ج + ... - ع/اب - ع/اج - ع/بج - .....

+ ع/ابج + ...

یہاں ع/ا ذیل کے عددوں

ا، ۲ا، ۳ا، ...... ع/ا × ا

کی اُس تعداد کو تعبیر کرتا ہے جن میں جزو ضربی ا شامل ہے۔

اور رقم ع/اب عددوں اب، ۲اب، ۳اب، ...... ع/اب × اب کی اُس تعداد کو تعبیر کرتی ہے جنمیں جزو ضربی اب شامل ہے اور علیٰ ہذا القیاس مزید براں ہر ایک عدد ایک اور

صرف ایک بار شمار میں آتا ہے۔ مثلاً اب کا ہر ایک ضعف ایک مرتبہ ا کے اضعاف ہیں، ایک مرتبہ ب کے اضعاف میں اور منفی طور پر ایک مرتبہ اب کے اضعاف میں شامل ہوگا۔ پس کل ایک مرتبہ شمار میں آئے گا اسی طرح اب ج کا ہر ضعف (ا، ب، ج) اضعاف میں جن میں بالترتیب

$\frac{\text{ع}}{\text{ا}}$ ، $\frac{\text{ع}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{ع}}{\text{ج}}$ رقمیں ہیں ایک ایک بار آئیگا

اور اب، اج، ب ج کے اضعاف جن میں بالترتیب

$\frac{\text{ع}}{\text{اب}}$ ، $\frac{\text{ع}}{\text{اج}}$ ، $\frac{\text{ع}}{\text{ب ج}}$ رقمیں ہیں ایک ایک بار آئیگا

اور اب ج کے $\frac{\text{ع}}{\text{اب ج}}$ اضعاف میں ایک مرتبہ آئیگا۔

اس لئے اب ج کا ہر ایک ضعف ۳ - ۳ + ۱ یعنی کُل ایک اور صرف ایک دفعہ آئیگا۔ اسی طرح اور صورتوں پر بحث کی جاسکتی ہے۔

۳۳۴۔ [ولسن، کا مسئلہ]۔ اگر ف ایک عددِ مفرد ہو تو

۱ + $\lfloor$ف-۱، ف پر تقسیم ہوسکتا ہے۔

دفعہ ۳۱۴ مشق ۲ کی رُو سے

$$\lfloor\text{ف}-۱ = (\text{ف}-۱)^{\text{ف}-۱} - (\text{ف}-۱)(\text{ف}-۲)^{\text{ف}-۱} + \frac{(\text{ف}-۱)(\text{ف}-۲)}{۱\times۲}\times(\text{ف}-۳)^{\text{ف}-۱}$$

$$- \frac{(\text{ف}-۱)(\text{ف}-۲)(\text{ف}-۳)}{\lfloor۳}(\text{ف}-۴)^{\text{ف}-۱} + \dots\dots (\text{ف}-۱) \text{ رقموں تک}$$

اور فرما کے مسئلہ کی رو سے جملوں $(\text{ف}-۱)^{\text{ف}-۱}$، $(\text{ف}-۲)^{\text{ف}-۱}$، $(\text{ف}-۳)^{\text{ف}-۱}$ ......

میں سے ہر ایک جملہ ا + ضعف (ف) کی شکل کا ہے پس

|ف-۱ = ضعف (ف) + {۱ - (ف-۱) + (ف-۱)(ف-۲) / ۲×۱ - .... (ف-۱) رقموں تک}

= ضعف (ف) + {(۱-۱)^ف-۱ - (-۱)^ف-۱}

= ضعف (ف) - ۱ کیونکہ ف - ۱ جفت ہے

اسلئے ۱ + |ف-۱ = ضعف (ف)

یہ مسئلہ صرف اسی صورت میں درست ہے جب ف مفرد ہو، فرض کرو کہ ف کا کوئی جزو ضربی ق ہے، تب ق، ف سے کم ہے اور |ف-۱ کو پورا تقسیم کرتا ہے، لہذا ۱ + |ف-۱، ق کا ضعف نہیں ہے اور بنابریں ف کا ضعف نہیں ہے۔

ولسن کا مسئلہ دفعہ ۴۳۱ کے نتیجہ کو استعمال کئے بغیر بھی ثابت ہو سکتا ہے، دیکھو دفعۂ ذیل۔

۴۳۴۔ (ولسن کا مسئلہ) اگر ف کوئی عددِ مفرد ہو تو ۱ + |ف-۱، ف پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ اعداد

۱، ۲، ۳، ۴، .... ف-۱ .... (۱)

میں سے کوئی عدد ا ہے۔ تب ا بلحاظ ف کے مفرد ہے اور اگر حاصل ضرب ۱×ا، ۲×ا، ۳×ا، ۴×ا، .... (ف-۱)ا کو ف پر تقسیم کیا جائے تو ان میں سے ایک اور صرف ایک ہی عدد کی صورت میں باقی ۱ نکلتی ہے (دیکھو دفعہ ۴۲۶)

فرض کرو کہ یہ حاصل ضرب م ا ہے، اب ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ اعداد م اور ا مختلف ہیں سوائے اُس صورت کے

جبکہ ا = ف - ا یا ا، کیونکہ اگر ا² کو ف پر تقسیم کرنے سے باقی ا نکلے تو

ا² - ا ≡ ۰ (مق ف)

اور چونکہ ف مفرد ہے اس لئے یہ صرف اسی صورت میں ہوسکتا ہے جبکہ ا + ا = ف یا ا - ا = ۰ یعنی جبکہ ا = ف - ا یا ا

لہذا حاصل ضربوں ۲ا، ۳ا، .... (ف - ۲) ا میں سے صرف ایک حاصل ضرب ایسا ہے جس کو ف پر تقسیم کرنے سے باقی ا حاصل ہوتی ہے یعنی سلسلہ (ا) میں جو عدد ہیں ان میں سے ہر ایک کی صورت میں بالاستثنائے پہلے اور آخری عدد کے ہم ایک اور صرف ایک عدد ایسا معلوم کرسکتے ہیں کہ ان دونوں کا حاصل ضرب ضعف (ف) + ا کی شکل کا ہو۔

اس لئے صحیح عددوں ۲، ۳، ۴، .... (ف - ۲) میں سے جنکی تعداد جفت ہے دو دو عددوں کو لیکر ایسے زوج بنائے جاسکتے ہیں کہ ہر زوج کا حاصل ضرب ضعف (ف) + ا کی شکل کا ہو۔

اس لئے ان سب زوجوں کو باہم ضرب دینے سے

۲×۳×۴×...... (ف - ۲) ≡ ضعف (ف) + ا

یعنی ا×۲×۳×۴......×(ف - ۲) × (ف - ا) = (ف - ا) {ضعف (ف) + ا}

اس سے |ف - ا = ضعف (ف) + ف - ا

یعنی ا + |ف - ا، ف کا ضعف ہے۔

نتیجہ صریح - اگر ۲ف + ا عدد مفرد ہو تو (|ف)² + (-ا)^ف، ۲ف + ا پر تقسیم ہوسکتا ہے۔

ولسن کے مسئلہ کی رو سے ا + |۲ف تقسیم ہوسکتا ہے ۲ف + ا پر،

ن = ۲ف + ا رکھو یعنی ف + ا = ن - ف، تب

|۲ف = ۱×۲×۳×۴×.....×ف(ف+۱)(ف+۲).....(ن-۱)

= ۱(ن-۱)۲(ن-۲)۳(ن-۳).....ف(ن-ف)

= ن کا ضعف + (-۱)^{ف} (|ف)^{۲}

اِس لئے ۱ + (-۱)^{ف} (|ف)^{۲} تقسیم ہوسکتا ہے ن پر یا ۲ف + ۱ پر

لہذا (|ف)^{۲} + (-۱)^{ف} تقسیم ہوسکتا ہے ۲ف + ۱ پر

۴۳۵- اعداد کے خواص کے متعلق بہت سے مسئلے استقراءِ حسابیہ سے ثابت ہوسکتے ہیں۔

مثال ۱- اگر ف عدد مفرد ہو تو لا^{ف}- لا، ف پر تقسیم ہوسکتا ہے۔
لا^{ف}- لا کو فا(لا) سے تعبیر کرو، تب

فا(لا+۱) - فا(لا) = (لا+۱)^{ف} - (لا+۱) - (لا^{ف} - لا)

= ف لا$^{ف-۱}$ + $\frac{\text{ف(ف-۱)}}{۱\times۲}$ × لا$^{ف-۲}$ + ... + ف لا

= ف کا ضعف، اگر ف مفرد ہو (دفعہ ۴۱۹)

∴ فا(لا+۱) = فا(لا) + ف کا ضعف

اِس لئے اگر فا(لا)، ف پر تقسیم ہوسکے تو فا(لا+۱) بھی ف پر تقسیم ہوسکیگا

لیکن فا(۲) = ۲^{ف} - ۲ = (۱+۱)^{ف} - ۲

اور یہ ف کا ضعف ہے جب ف مفرد ہو (دفعہ ۴۱۹)

اِس لئے فا(۳)، ف پر تقسیم ہوسکتا ہے، بنابریں فا(۴)، ف پر تقسیم ہوسکتا ہے۔ علیٰ ہذالقیاس۔ اِس لئے یہ مسئلہ ہر صورت میں درست ہے۔

اس سے فرما کے مسئلہ کا ایک نیا ثبوت حاصل ہوتا ہے کیونکہ ظاہر ہے کہ اگر لا بلحاظ ف کے مفرد ہو تو $\text{لا}^{\text{ف}-1} - 1$، ف کا ضعف ہوگا۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ $\text{۵}^{\text{۲ن}+\text{۲}} - \text{۲۴ن} - \text{۲۵}$ پورا تقسیم ہوسکتا ہے ۵۷۶ پر۔

$\text{۵}^{\text{۲ن}+\text{۲}} - \text{۲۴ن} - \text{۲۵}$ کو فا(ن) سے تعبیر کرو

$$\text{تب}\quad \text{فا(ن+۱)} = \text{۵}^{\text{۲ن}+\text{۴}} - \text{۲۴(ن+۱)} - \text{۲۵}$$

$$= \text{۵}^{\text{۲}} \times \text{۵}^{\text{۲ن}+\text{۲}} - \text{۲۴ن} - \text{۴۹}$$

$$\therefore \text{فا(ن+۱)} - \text{۲۵فا(ن)} = \text{۲۵(۲۴ن + ۲۵)} - \text{۲۴ن} - \text{۴۹}$$

$$= \text{۵۷۶(ن+۱)}$$

اس لئے اگر فا(ن)، ۵۷۶ پر تقسیم ہو جائے تو فا(ن+۱) بھی تقسیم ہو جائیگا، لیکن ہم جانچ کرنے سے دیکھتے ہیں کہ یہ مسئلہ درست ہے جبکہ ن = ۱ اس لئے یہ درست ہوگا جبکہ ن = ۲ اس لئے یہ درست ہوگا جبکہ ن = ۳ اور علیٰ ہذالقیاس، پس یہ ہر صورت میں درست ہے۔

مندرجہ بالا نتیجہ ذیل کے طریقہ سے بھی حاصل ہوسکتا ہے۔

$$\text{۵}^{\text{۲ن}+\text{۲}} - \text{۲۴ن} - \text{۲۵} = \text{۲۵}^{\text{ن}+\text{۱}} - \text{۲۴ن} - \text{۲۵}$$

$$= \text{۲۵(۱+۲۴)}^{\text{ن}} - \text{۲۴ن} - \text{۲۵}$$

$$= \text{۲۵} + \text{۲۵} \times \text{ن} \times \text{۲۴} + \text{ضعف}(\text{۲۴}^{\text{۲}})$$
$$- \text{۲۴ن} - \text{۲۵}$$

$$= \text{۵۷۶ن} + \text{ضعف(۵۷۶)}$$

$$= \text{ضعف(۵۷۶)}$$

امثلہ نمبری ۳۰ (ب)

۱- ثابت کرو کہ ۱۰^ن + ۳ × ۴^ن+۲ + ۵ تقسیم ہو سکتا ہے ۹ پر -
۲- ثابت کرو کہ ۲ × ۷^ن + ۳ × ۵^ن - ۵ ضعف ہے ۲۴ کا -
۳- ثابت کرو کہ ۴ × ۶^ن + ۵^ن+۱ کو جب ۲۰ پر تقسیم کیا جائے تو باقی ۹ حاصل ہوتی ہے -
۴- ثابت کرو کہ ۸ × ۷^ن + ۴^ن+۲، ۲۴ (۲ر - ۱) کی شکل کا ہے -
۵- اگر ف مفرد ہو تو ثابت کرو کہ ۲ |ف-۳ + ۱، ف کا ضعف ہے -
۶- ثابت کرو کہ ا^۴ب+۱ - ا تقسیم ہو سکتا ہے ۳۰ پر -
۷- ثابت کرو کہ |۲^ر میں ۲ کی بڑی سے بڑی قوت ۲^ر - ۱ ہے -
۸- ثابت کرو کہ ۳^۴ن+۲ + ۵^۲ن+۱ ضعف ہے ۱۴ کا -
۹- ثابت کرو کہ ۳^۲ن+۵ + ۱۶۰ ن^۲ - ۵۶ ن - ۲۴۳ تقسیم ہو سکتا ہے ۵۱۲ پر -
۱۰- ثابت کرو کہ (۱ + لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴)^ن-۱ کی تفصیل میں لا کی طاق قوتوں کے سروں کا حاصل جمع ن پر تقسیم ہو سکتا ہے جبکہ ن کوئی عدد مفرد ہو بالاستثنائے ۵ کے -
۱۱- اگر ن، ۷ سے بڑا کوئی عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ ن^۶ - ۱ تقسیم ہو سکتا ہے ۵۰۴ پر -
۱۲- اگر ن کوئی طاق عدد ہو تو ثابت کرو کہ
ن^۶ + ۳ ن^۴ + ۷ ن^۲ - ۱۱ ضعف ہے ۱۲۸ کا -
۱۳- اگر ف کوئی عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ (۱ + لا)^ف-۱ کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے سر ف کے کسی ضعف کی نسبت بقدر ۱ کے متبادلاً بڑے چھوٹے ہیں -
۱۴- ف ایک عدد مفرد ہے، اور ف عددوں کا ایک ایسا

سلسلۂ حسابیہ ہے جس کا فرق مشترک ف پر تقسیم نہیں ہوسکتا۔ ثابت کرو کہ اِن عددوں کی (ف-۱) ویں قوتوں کا حاصل جمع ف کے ایک ضعف سے بقدر ایک کے کم ہے۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ $ا^{۱۲} - ب^{۱۲}$، ۹۱ پر تقسیم ہوسکتا ہے اگر ا اور ب دونوں بلحاظ ۹۱ کے مفرد ہوں۔

۱۶۔ اگر ف مفرد ہو تو ثابت کرو کہ $\underline{|ف-۲ر}\ \underline{|۲ر-۱} - ۱$ تقسیم ہوسکتا ہے ف پر۔

۱۷۔ اگر (ن-۱) اور (ن+۱) دونوں مفرد عدد ہوں اور ۵ سے بڑے ہوں تو ثابت کرو کہ ن $(ن^۲ - ۴)$ تقسیم ہوسکتا ہے ۱۲۰ پر اور $ن^۲ (ن^۲ + ۱۶)$ تقسیم ہوسکتا ہے ۷۲۰ پر۔ نیز دکھاؤ کہ ن کی شکل ۳۰ت یا ۳۰ت ± ۱۲ ہے۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ ن کی بڑی سے بڑی قوت جو $\underline{|ن^ر - ۱}$ میں شامل ہے

$$\frac{ن^ر - ن ر + ر - ۱}{ن - ۱}$$ ہے۔

۱۹۔ اگر ف عدد مفرد ہو اور ا بلحاظ ف کے مفرد ہو اور نیز ایک مربع عدد $ج^۲$ ایسا معلوم ہوسکتا ہو کہ $ج^۲ - ا$ تقسیم ہوسکے ف پر تو ثابت کرو کہ $ا^{\frac{۱}{۲}(ف-۱)} - ۱$ تقسیم ہوسکتا ہے ف پر۔

۲۰۔ استطابق

$$لا^{۹۸} - ۱ \equiv ۰ \ (مق ۱۳۹)$$

کا عام حل دریافت کرو۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ ایسے تمام اعداد کے مربعوں کا حاصل جمع جو ایک خاص عدد ع سے کم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں

$$\frac{ع^۳}{۳}\left(۱-\frac{۱}{ا}\right)\left(۱-\frac{۱}{ب}\right)\left(۱-\frac{۱}{ج}\right)\cdots + \frac{ع}{۶}\left(۱-\frac{۱}{ا}\right)\left(۱-\frac{۱}{ب}\right)\left(۱-\frac{۱}{ج}\right)$$

....

ہے اور مکعبوں کا حاصل جمع

$$\frac{\text{ع}^4}{4}\left(1-\frac{1}{\text{ا}}\right)\left(1-\frac{1}{\text{ب}}\right)\left(1-\frac{1}{\text{ج}}\right)\cdots+\frac{\text{ع}^2}{4}\left(1-\frac{1}{\text{ا}}\right)\left(1-\frac{1}{\text{ب}}\right)\left(1-\frac{1}{\text{ج}}\right)\cdots$$

ہے جہاں ا، ب، ج ...... وغیرہ ع کے مختلف مفرد اجزائے ضربی ہیں۔

۲۲- اگر ف اور ق دو مثبت صحیح عدد ہوں تو ثابت کرو کہ

$\underline{|\text{ف ق}}$ تقسیم ہو سکتا ہے $(\underline{|\text{ف}})^{\text{ق}}\,\underline{|\text{ق}}$ پر $(\underline{|\text{ق}})^{\text{ف}}\,\underline{|\text{ف}}$ پر

۲۳- ثابت کرو کہ ایسے مربع عدد جو مثلث عدد بھی ہوں $\frac{1}{1-6\text{لا}+\text{لا}^2}$ کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے سروں کے مربعوں کے مساوی ہیں اور دکھاؤ کہ ایسے مربع اعداد جو مخمس بھی ہوں $\frac{1}{1-10\text{لا}+\text{لا}^2}$ کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے سروں سے تعبیر ہوتے ہیں۔

۲۴- ثابت کرو کہ ایسے تمام عددوں کی چوتھی قوتوں کا حاصل جمع جو عدد ع سے کم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں

$$\frac{\text{ع}^5}{5}\left(1-\frac{1}{\text{ا}}\right)\left(1-\frac{1}{\text{ب}}\right)\left(1-\frac{1}{\text{ج}}\right)\cdots+\frac{\text{ع}^3}{3}(1-\text{ا})(1-\text{ب})(1-\text{ج})\cdots$$

$$-\frac{\text{ع}}{30}(1-\text{ا}^3)(1-\text{ب}^3)(1-\text{ج}^3)\cdots\cdots$$

ہے جہاں ا، ب، ج، ع کے مختلف مفرد اجزائے ضربی ہیں۔

۲۵- اگر اُن صحیح اعداد کی تعداد کو جو عدد ع سے کم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں فہ(ع) سے تعبیر کیا جائے اور اگر لا بلحاظ ع کے مفرد ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا}^{\text{فہ(ع)}}-1\equiv 0\ (\text{مق ع})$$

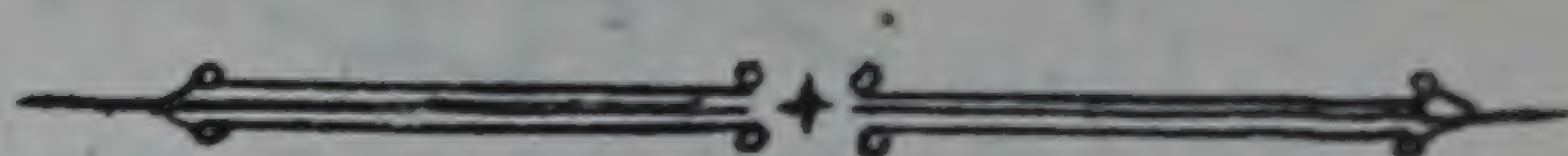
۲۶- اگر کسی عدد ع کے مقسوم علیہ س_1، س_2، س_3، .... ہوں

تو دکھاؤ کہ $فہ(س_{۱}) + فہ(س_{۲}) + فہ(س_{۳}) + \ldots = ع$

نیز ثابت کرو کہ

$$فہ(۱)\,\frac{لا}{۱+لا^{۲}} - فہ(۳)\,\frac{لا}{۱+لا^{۶}} + فہ(۵)\,\frac{لا^{۵}}{۱+لا^{۱۰}} - \ldots\ \text{تا لاتناہی}$$

$$= \frac{لا(۱-لا^{۲})}{(۱+لا^{۲})^{۲}}$$



اکتیسواں باب

مسلسل کسور کا عام نظریہ

۴۳۶ - پچیسویں باب میں ہم نے جن مسلسل کسروں پر بحث کی ہے وہ اس شکل کی تھیں: $\text{ا}_1 + \frac{1}{\text{ا}_2 +} \frac{1}{\text{ا}_3 +}$ .... جہاں ا_2، ا_3، ... مثبت صحیح عدد ہیں اور ا_1 یا کوئی مثبت صحیح عدد ہے یا صفر کے مساوی ہے - اب ہم زیادہ عام شکل کی مسلسل کسروں پر بحث کرتے ہیں -

۴۳۷ - مسلسل کسر کی عام سے عام شکل $\frac{\text{ب}_1}{\text{ا}_1 \pm} \frac{\text{ب}_2}{\text{ا}_2 \pm} \frac{\text{ب}_3}{\text{ا}_3 \pm}$ .... ہے

جہاں ا_1، ا_2، ا_3 ... ب_1، ب_2، ب_3 ...... کوئی مقداریں ہیں۔

کسور $\frac{\text{ب}_1}{\text{ا}_1}$، $\frac{\text{ب}_2}{\text{ا}_2}$، $\frac{\text{ب}_3}{\text{ا}_3}$ ..... کو مسلسل کسر کے اجزائے ترکیبی کہتے ہیں، ہم اپنی توجہ صرف دو صورتوں تک محدود رکھیں گے (۱) وہ صورت جس میں ہر جزوِ ترکیبی کی علامت مثبت ہے (۲) وہ صورت جس میں ہر جزوِ ترکیبی کی علامت منفی ہے۔

۴۳۸ - مسلسل کسر

$$\frac{\text{ب}_1}{\text{ا}_1+}\ \frac{\text{ب}_2}{\text{ا}_2+}\ \frac{\text{ب}_3}{\text{ا}_3+}\ \ldots\ldots$$

کے متواتر مستدقوں کے بنانے کا کلیہ دریافت کرو۔

پہلے تین مستدق یہ ہیں۔

$$\frac{\text{ب}_1}{\text{ا}_1}\ ,\quad \frac{\text{ا}_2\text{ب}_1}{\text{ا}_2\text{ا}_1+\text{ب}_2}\ ,\quad \frac{\text{ا}_3\text{ا}_2\text{ب}_1+\text{ب}_3\text{ب}_1}{\text{ا}_3(\text{ا}_2\text{ا}_1+\text{ب}_2)+\text{ب}_3\text{ا}_1}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ تیسرے مستدق کا شمار کنندہ دوسرے مستدق کے شمار کنندہ کو ا_3 سے اور پہلے مستدق کے شمار کنندہ کو ب_3 سے ضرب دیکر دونوں حاصل ضربوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے نیز تیسرے مستدق کا نسب نما بھی اسی طرح حاصل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ متواتر مستدق اسی طرح سے بنائے گئے ہیں، ان کے شمار کنندوں کو ق_1، ق_2، ق_3 .... سے اور نسب نماؤں کو ل_1، ل_2، ل_3 .... سے تعبیر کرو۔

یہ تسلیم کرو کہ کلیہ بالا ن ویں مستدق کے لئے صحیح ہے، یعنی فرض کرو کہ $\text{ق}_{\text{ن}}=\text{ا}_{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-1}+\text{ب}_{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-2}$ اور $\text{ل}_{\text{ن}}=\text{ا}_{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}-1}+\text{ب}_{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}-2}$

(ن + ۱) واں مستدق ن ویں مستدق سے صرف اس لحاظ سے مختلف ہے کہ اول الذکر میں $\text{ا}_{\text{ن}}$ کی بجائے $\text{ا}_{\text{ن}}+\frac{\text{ب}_{\text{ن}+1}}{\text{ا}_{\text{ن}+1}}$ ہے، اسلئے (ن + ۱) واں مستدق

$$=\frac{\left(\text{ا}_{\text{ن}}+\frac{\text{ب}_{\text{ن}+1}}{\text{ا}_{\text{ن}+1}}\right)\text{ق}_{\text{ن}-1}+\text{ب}_{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-2}}{\left(\text{ا}_{\text{ن}}+\frac{\text{ب}_{\text{ن}+1}}{\text{ا}_{\text{ن}+1}}\right)\text{ل}_{\text{ن}-1}+\text{ب}_{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}-2}}=\frac{\text{ق}_{\text{ن}}+\frac{\text{ب}_{\text{ن}+1}}{\text{ا}_{\text{ن}+1}}\text{ق}_{\text{ن}-1}}{\text{ل}_{\text{ن}}+\frac{\text{ب}_{\text{ن}+1}}{\text{ا}_{\text{ن}+1}}\text{ل}_{\text{ن}-1}}$$

$$= \frac{\text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{ق}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ق}_{\text{ن}-1}}{\text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}-1}}$$

لہذا اگر ہم $\text{ق}_{\text{ن}+1} = \text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{ق}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ق}_{\text{ن}-1}$

اور $\text{ل}_{\text{ن}+1} = \text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}-1}$

رکھیں تو ظاہر ہے کہ (ن + ۱) ویں مستدق کا شمار کنندہ اور نسب نما اُسی کلیہ کے ماتحت بنتے ہیں جو ن ویں مستدق کی صورت میں تسلیم کیا گیا تھا۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ یہ کلیہ تیسرے مستدق کے لئے درست ہے لہذا یہ چوتھے مستدق کے لئے درست ہے اور علیٰ ہذالقیاس۔ پس یہ عام طور پر درست ہے۔

۴۳۹۔ مسلسل کسر

$$\frac{\text{ب}_1}{\text{ا}_1 -}\ \frac{\text{ب}_2}{\text{ا}_2 -}\ \frac{\text{ب}_3}{\text{ا}_3 -}\ \cdots\cdots$$

کی صورت میں ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{ق}_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ق}_{\text{ن}-1} - \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ق}_{\text{ن}-2}$$

اور $$\text{ل}_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}-1} - \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}-2}$$

یہ نتیجہ دفعہ ماقبل کے نتیجہ سے محض $\text{ب}_{\text{ن}}$ کی علامت بدلنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

۴۴۰۔ مسلسل کسر $\frac{\text{ب}_1}{\text{ا}_1 +}\ \frac{\text{ب}_2}{\text{ا}_2 +}\ \frac{\text{ب}_3}{\text{ا}_3 +}\ \cdots\cdots$

میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ

$$\text{ق}_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-1} + \text{ب}_{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-2} \quad \text{اور} \quad \text{ل}_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}-1} + \text{ب}_{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}-2}$$

$$\therefore \frac{\text{ق}_{\text{ن}+1}}{\text{ل}_{\text{ن}+1}} - \frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}} = \frac{(\text{ا}_{\text{ن}+1}\text{ق}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}+1}\text{ق}_{\text{ن}-1})\text{ل}_{\text{ن}} - (\text{ا}_{\text{ن}+1}\text{ل}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}+1}\text{ل}_{\text{ن}-1})\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}+1}\text{ل}_{\text{ن}}}$$

$$= -\frac{\text{ب}_{\text{ن}+1}\text{ل}_{\text{ن}-1}}{\text{ل}_{\text{ن}+1}}\left(\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}} - \frac{\text{ق}_{\text{ن}-1}}{\text{ل}_{\text{ن}-1}}\right)$$

لیکن $\frac{\text{ب}_{\text{ن}+1}\text{ل}_{\text{ن}-1}}{\text{ل}_{\text{ن}+1}} = \frac{\text{ب}_{\text{ن}+1}\text{ل}_{\text{ن}-1}}{\text{ا}_{\text{ن}+1}\text{ل}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}+1}\text{ل}_{\text{ن}-1}}$ جو ایک کسر واجب ہے، لہذا

$\frac{\text{ق}_{\text{ن}+1}}{\text{ل}_{\text{ن}+1}} - \frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ تعداداً کم ہے $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}} - \frac{\text{ق}_{\text{ن}-1}}{\text{ل}_{\text{ن}-1}}$ سے

اور بلحاظ علامت اس سے مختلف ہے۔

اسی قسم کے استدلال سے جو دفعہ ۳۳۵ میں کیا گیا ہے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ طاق رتبہ کا ہر مستدق مسلسل کسر سے بڑا ہوتا ہے اور جفت رتبہ کا ہر مستدق مسلسل کسر سے چھوٹا ہوتا ہے پس طاق ویں رتبہ کا ہر ایک مستدق جفت ویں رتبہ کے ہر ایک مستدق سے بڑا ہوتا ہے۔

مثلاً $\frac{\text{ق}_{2\text{ن}+1}}{\text{ل}_{2\text{ن}+1}} - \frac{\text{ق}_{2\text{ن}}}{\text{ل}_{2\text{ن}}}$ مثبت ہے اور $\frac{\text{ق}_{2\text{ن}-1}}{\text{ل}_{2\text{ن}-1}} - \frac{\text{ق}_{2\text{ن}}}{\text{ل}_{2\text{ن}}}$ سے

کم ہے، لہذا $\frac{ق_{2ن-1}}{ل_{2ن-1}} > \frac{ق_{2ن+1}}{ل_{2ن+1}}$

نیز $\frac{ق_{2ن-1}}{ل_{2ن-1}} - \frac{ق_{2ن}}{ل_{2ن}}$ مثبت ہے اور $\frac{ق_{2ن-1}}{ل_{2ن-1}} - \frac{ق_{2ن-2}}{ل_{2ن-2}}$ سے

کم ہے، لہذا $\frac{ق_{2ن-2}}{ل_{2ن-2}} < \frac{ق_{2ن}}{ل_{2ن}}$

پس طاق ویں رتبہ کے سب متدق مسلسل کسر سے بڑے ہوتے ہیں اور ان کی قیمت بتدریج کم ہوتی جاتی ہے۔ لیکن جفت ویں رتبہ کے سب متدق مسلسل کسر سے چھوٹے ہوتے ہیں اور ان کی قیمت بتدریج بڑھتی جاتی ہے۔

اب فرض کرو کہ اجزائے ترکیبی کی تعداد لا انتہا ہے، تب طاق ویں رتبہ کے متدقوں کی کوئی محدود انتہا ہوگی اور جفت ویں رتبہ کے متدقوں کی بھی کوئی محدود انتہا ہوگی۔ اگر یہ انتہائیں مساوی ہوں تو کسر مسلسل کی ایک معین انتہا ہوگی۔ اگر یہ انتہائیں مساوی نہ ہوں یعنی طاق ویں متدقوں کی انتہا اور ہو اور جفت ویں متدقوں کی کچھ اور تو مسلسل کسر کو اہتزازی کسر کہا جاسکتا ہے، اس صورت میں کسر مذکور دو ایسی مقادیر کو علامتوں کے ذریعہ تعبیر کرتی ہے جن میں سے ایک جفت متدقوں کی انتہا ہے اور دوسری طاق متدقوں کی۔

۱۸۴ - ثابت کرو کہ مسلسل کسر $\frac{ب_1}{ا_1+}\;\frac{ب_2}{ا_2+}\;\frac{ب_3}{ا_3+}$ کی ایک معین انتہا ہوگی اگر $\frac{ا_ن\,ا_{ن+1}}{ب_{ن+1}}$ کی انتہا جبکہ ن لا انتہا

بڑا ہو صفر سے بڑی ہو۔

مسلسل کسر کی قیمت ایک خاص معین مقدار ہوگی اگر $\frac{\text{ق}_{\text{ن}+1}}{\text{ل}_{\text{ن}+1}}$ اور $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$

کی انتہائوں کا فرق جبکہ ن لاانتہا بڑا ہو جائے صفر ہو۔

اب $\frac{\text{ق}_{\text{ن}+1}}{\text{ل}_{\text{ن}+1}} - \frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}} = -\frac{\text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}-1}}{\text{ل}_{\text{ن}+1}}\left(\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}} - \frac{\text{ق}_{\text{ن}-1}}{\text{ل}_{\text{ن}-1}}\right)$

اسی طرح $\frac{\text{ق}_{\text{ن}+1}}{\text{ل}_{\text{ن}+1}} - \frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}} = (-1)^{\text{ن}-1}\frac{\text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}-1}}{\text{ل}_{\text{ن}+1}} \times \frac{\text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}-2}}{\text{ل}_{\text{ن}}} \times \cdots$

$\cdots \times \frac{\text{ب}_4\,\text{ل}_2}{\text{ل}_4} \times \frac{\text{ب}_3\,\text{ل}_1}{\text{ل}_3}\left(\frac{\text{ق}_2}{\text{ل}_2} - \frac{\text{ق}_1}{\text{ل}_1}\right)$

لیکن $\frac{\text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}-1}}{\text{ل}_{\text{ن}+1}} = \frac{\text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}-1}}{\text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}-1}} = \frac{1}{\frac{\text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}-1}} + 1}$

اور $\frac{\text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}-1}} = \frac{\text{ا}_{\text{ن}+1}(\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}-1} + \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}-2})}{\text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}-1}}$

$= \frac{\text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ب}_{\text{ن}+1}} + \frac{\text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}-2}}{\text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}-1}}$

نیز ان رقموں میں سے کوئی رقم منفی نہیں ہو سکتی، اسلئے

اگر $\frac{ا_{ن}\ ا_{ن+1}}{ب_{ن+1}}$ کی انتہا صفر سے بڑی ہو تو $\frac{ا_{ن+1}\ ل_{ن}}{ب_{ن+1}\ ل_{ن-1}}$ کی انتہا بھی صفر سے بڑی ہو گی، اِس صورت میں

$\frac{ب_{ن+1}\ ل_{ن-1}}{ل_{ن+1}}$ کی انتہا ایک سے کم ہو گی۔ لہذا

$\frac{ق_{ن+1}}{ل_{ن+1}} - \frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$ کی قیمت لا انتہا کسور واجب کے حاصل ضرب کی انتہائی قیمت کے مساوی ہو گی گویا صفر ہو گی۔ یعنی $\frac{ق_{ن+1}}{ل_{ن+1}}$ اور $\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$ کی انتہائیں ایک ہی ہوں گی۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔ مثلاً کسر مسلسل

$$\frac{۱^۲}{۳+}\ \frac{۲^۲}{۵+}\ \frac{۳^۲}{۷+}\ \cdots\cdots\ \frac{ن^۲}{۲ن+۱+}\ \cdots\cdots$$

میں نہا $\frac{ا_{ن}\ ا_{ن+1}}{ب_{ن+1}}$ = نہا $\frac{(۲ن+۱)(۲ن+۳)}{(ن+۱)^۲}$ = ۴

لہذا کسر مذکور کی ایک معیّن انتہا ہے۔

۴۴۲ - اگر مسلسل کسر $\frac{ب_۱}{ا_۱-}\ \frac{ب_۲}{ا_۲-}\ \frac{ب_۳}{ا_۳-}$ میں ہر ایک جزو ترکیبی کا نسب نما شمار کنندہ سے کم از کم بقدر ایک کے بڑا ہو تو مستدق مثبت کسریں ہوں گی جو بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب میں ہوں گی۔

حسب مفروض $\frac{ب_1}{ا_1}$، $\frac{ب_2}{ا_2}$، $\frac{ب_3}{ا_3}$ ..... سب واجب کسریں ہیں جن میں سے ہر ایک کا نسب نما شمار کنندہ سے کم از کم بقدر ایک کے بڑا ہے۔ دوسرا مستدق $\frac{ب_1}{ا_1 - \frac{ب_2}{ا_2}}$ ہے

اور چونکہ $ا_1$، $ب_1$ سے کم از کم بقدر ۱ کے بڑا ہے اور $\frac{ب_2}{ا_2}$ کسر واجب ہے اسلئے $ا_1 - \frac{ب_2}{ا_2}$ بڑا ہے $ب_1$ سے، یعنی دوسرا مستدق مثبت کسر واجب ہے اسی طرح سے دکھایا جاسکتا ہے کہ $\frac{ب_2}{ا_2 - \frac{ب_3}{ا_3}}$ کسر واجب ہے، اس کو $ک_2$ سے

تعبیر کرو، تب تیسرا مستدق $\frac{ب_1}{ا_1 - ک_2}$ ہے، اس لئے یہ بھی مثبت

کسر واجب ہے اسی طرح سے یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ

$\frac{ب_2}{ا_2 -}\ \frac{ب_3}{ا_3 -}\ \frac{ب_4}{ا_4}$ مثبت کسر واجب ہے اسلئے چوتھا مستدق

$\frac{ب_1}{ا_1 -}\ \frac{ب_2}{ا_2 -}\ \frac{ب_3}{ا_3 -}\ \frac{ب_4}{ا_4}$ بھی مثبت کسر واجب ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔

نیز $ق_ن = ا_ن ق_{ن-1} - ب_ن ق_{ن-2}$، $ل_ن = ا_ن ل_{ن-1} - ب_ن ل_{ن-2}$

$$\frac{ق_{ن+۱}}{ل_{ن+۱}} - \frac{ق_{ن}}{ل_{ن}} = \frac{ب_{ن+۱}\, ل_{ن-۱}}{ل_{ن+۱}} \left(\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}} - \frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}} \right)$$

لہٰذا $\frac{ق_{ن+۱}}{ل_{ن+۱}} - \frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$ اور $\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}} - \frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}}$ کی علامت ایک ہی ہے

لیکن $\frac{ق_{۲}}{ل_{۲}} - \frac{ق_{۱}}{ل_{۱}} = \frac{ا_{۲}\, ب_{۱}}{ا_{۱} ا_{۲} - ب_{۲}} - \frac{ب_{۱}}{ا_{۱}} = \frac{ب_{۱}\, ب_{۲}}{ل_{۱}\, ل_{۲}}$ اسلئے

یہ مثبت ہے، لہٰذا $\frac{ق_{۲}}{ل_{۲}} > \frac{ق_{۱}}{ل_{۱}}$ ، $\frac{ق_{۳}}{ل_{۳}} > \frac{ق_{۲}}{ل_{۲}}$ ، $\frac{ق_{۴}}{ل_{۴}} > \frac{ق_{۳}}{ل_{۳}}$

اور علیٰ ہذا القیاس۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نتیجہ صریح۔ اگر اجزائے ترکیبی کی تعداد لامتناہی ہو تو مستدق کسور واجب کا ایک لامتناہی سلسلہ بناتے ہیں جو بلحاظ مقدار صعودی ترتیب میں ہوتا ہے اور اِس صورت میں کسر مسلسل کی انتہا ایک معین مقدار ہوتی ہے جو ایک سے بڑی نہیں ہو سکتی۔

۳۴۴۔ ضابطہ

$$ق_{ن} = ا_{ن}\, ق_{ن-۱} + ب_{ن}\, ق_{ن-۲} \quad \text{اور} \quad ل_{ن} = ا_{ن}\, ل_{ن-۱} + ب_{ن}\, ل_{ن-۲}$$

سے ہم بالتواتر جتنے مستدق چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔ تاہم بعض صورتوں میں ن ویں مستدق کے لئے ایک عام جملہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مثال۔ $\frac{۶}{۵-}\ \frac{۶}{۵-}\ \frac{۶}{۵-}$ .... کا ن واں مستدق معلوم کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ $ق_{ن} = ۵ق_{ن-۱} - ۶ق_{ن-۲}$ ، پس شمار کنندے